



Facultad: Ciencias Pedagógicas

Carrera: Matemática-Física

Trabajo de Diploma

Autor: Juan Enrique Pérez Vera

Tutor: MSc. Ortelio Quero Méndez

Título: Sistema de ejercicios para favorecer la transferencia entre representaciones de la función cuadrática

Curso: 2016-2017

AGRADECIMIENTOS

- » **Muy especiales a mi tutor Ortelio Quero Méndez por todo el tiempo y esfuerzo que ha dedicado a enseñarme gran parte de todo lo que sé, por alentarme tanto él como mi madre el deseo de superarme académica y profesionalmente, por su siempre acertada guía y por toda la confianza que han tenido en mí.**
- » **A todos los grandes profesores que de una u otra manera han contribuido a mi formación como profesional.**
- » **A mi gran familia que tanto me ha ayudado en esta y todas las etapas de mi vida.**

Resumen

Este trabajo trata un tema de crucial importancia en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática relacionado con la transferencia entre representaciones de las funciones cuadráticas en noveno grado. Mediante diferentes métodos de investigación se pudo constatar que los alumnos presentan insuficiencias en el desarrollo de la habilidad para transferir entre representaciones de esta función, tales dificultades se manifiestan al transferir de la representación verbal a la analítica, de la analítica a la verbal, de la gráfica a la analítica y aunque transfieren correctamente de la representación analítica a la gráfica, no dominan el procedimiento descrito en el libro de texto. Además, en el libro de texto no existen ejercicios para todas las posibles transferencias por lo que la solución que se propone consiste en un sistema de ejercicios que complementan los del texto y favorecen el uso del software GeoGebra en el proceso de enseñanza-aprendizaje de este contenido. La realización de un pre-experimento pedagógico, en la ESBU Mártires de La Sierpe, permitió comprobar que la implementación del sistema de ejercicios contribuyó al desarrollo de la habilidad para transferir entre las representaciones de la función cuadrática en los alumnos de noveno grado.

Índice:

Contenido	Pág.
Introducción	1
Desarrollo	6
1. Fundamentos teóricos y metodológicos de la transferencia entre representaciones de la función cuadrática.	6
1.1. <i>El proceso de enseñanza-aprendizaje de la función cuadrática en noveno grado</i>	6
1.2. <i>Los conceptos de representación y transferencia entre representaciones. Los tipos y formas de representación de la función cuadrática. Las posibles transferencias entre las representaciones de la función cuadrática.</i>	8
1.3. La habilidad para la transferencia entre representaciones	11
2. <i>Diagnóstico del estado del aprendizaje de la transferencia entre representaciones de la función cuadrática.</i>	13
3. Sistema de ejercicios para favorecer el desarrollo de la habilidad para transferir entre las representaciones de la función cuadrática.	14
4. La implementación del sistema de ejercicios	22
Conclusiones	28
Recomendaciones	29
Bibliografía	
Anexos	

Introducción

En la comunidad de investigadores en didáctica de la Matemática, es reconocida la importancia de las representaciones en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática. Una muestra de lo afirmado anteriormente es que en los Principios y Estándares 2000 del Consejo Nacional de Profesores de Matemática (NCTM) de los Estados Unidos se reconoce el valor de cinco procesos, el segundo de ellos es la “**representación** (uso de recursos verbales, simbólicos y gráficos, traducción y conversión entre los mismos)” (Godino, J. Batanero, C y Font, V., 2003, p. 35).

Por otra parte, en el proyecto Pisa se afirma que las tareas están pensadas para abarcar un conjunto de procedimientos generales entre los que se encuentra la “representación, que incluye descodificar, interpretar y distinguir entre las distintas formas de presentar los objetos y las situaciones matemáticas, así como las interrelaciones entre las distintas representaciones; elegir, y cambiar entre, distintas formas de representación...” (Proyecto PISA, 2000, p. 79)

Una evidencia más de la importancia de las representaciones se aprecia en el Marco teórico y especificaciones de evaluación del TIMSS 2003 cuando se hace referencia a que “La representación de ideas forma el núcleo del pensamiento y de la comunicación matemáticas y la capacidad de crear representaciones equivalentes es fundamental para el éxito en la materia” (p.40).

Un clásico en el estudio de las representaciones como Duval considera que la conversión de representaciones es un problema crucial en el aprendizaje de las matemáticas.

En Cuba, el cuarto de los lineamientos correspondientes al enfoque metodológico general de la asignatura, se refiere a la necesidad de “propiciar la reflexión, el análisis de los significados y formas de representación de los contenidos, el establecimiento de sus relaciones mutuas, ...” y se precisa que la comprensión matemática guarda una estrecha relación con “ la utilización y construcción de representaciones de los objetos matemáticos y con la capacidad de transferir sus conocimientos ante una situación desconocida” (Álvarez, Almeida y Villegas, 2014, p.14)

Además, al establecer las líneas directrices para la enseñanza de la Matemática, se considera dentro de la directriz “adiestramiento lógico-lingüístico” lo relativo al “Trabajo con representaciones de objetos matemáticos” (Álvarez, Almeida y Villegas, 2014).

A pesar de que se han realizado trabajos relacionados con la transferencia entre representaciones en el proceso de enseñanza-aprendizaje (PEA) de la Matemática tanto en el extranjero (Lupiañez y Moreno, 2000; Romero, 2000; Hitt, 2001; Font, 2001 y 2001 a); Gómez y Rico, 2002), como en Cuba (Gómez, 2005, Cañizares, 2010, Leyva, 2012 y Quero y Ruiz, 2015) los resultados del desarrollo de la habilidad para transferir entre representaciones de la función cuadrática no alcanzan los niveles deseados.

En la revisión de los resultados de las comprobaciones de conocimiento aplicadas en la ESBU “Mártires de la Sierpe” se evidencian carencias en el aprendizaje de la función cuadrática por parte de los alumnos de noveno grado relacionadas con la transferencia entre representaciones de la función cuadrática tales como: no son capaces de transferir correctamente de la representación verbal de la función cuadrática a la representación analítica, ni de la representación gráfica a la analítica, y no muestran dominio del procedimiento descrito en el libro de texto para transferir de la representación analítica (estándar) a la gráfica.

Entre las causas identificadas se encuentran que las tareas docentes concebidas en los textos privilegian unas transferencias en detrimento de otras y que no se exige la utilización de software en el proceso de transferencia. Esto se pudo corroborar en una revisión de los informes de controles a clases y de las libretas de los alumnos del centro donde se realiza práctica laboral.

Teniendo en cuenta lo anterior se plantea como problema científico: ¿Cómo contribuir al desarrollo de la habilidad para transferir entre las diferentes representaciones de la función cuadrática en los alumnos de noveno grado? Para su solución ha sido necesario el estudio de las características distintivas del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática y, en particular, de la función cuadrática; así como de las potencialidades de las tecnologías en este sentido.

El objetivo del trabajo se encamina a: Elaborar un sistema de ejercicios que contribuyan al desarrollo de la habilidad para transferir entre las diferentes representaciones de la función cuadrática en los alumnos de noveno grado de la ESBU “Mártires de la Sierpe”.

El proceso de resolución del problema de investigación por la vía analítica condujo al planteamiento de los siguientes subproblemas a modo de preguntas científicas:

1. ¿Qué fundamentos teórico-metodológicos sustentan el proceso de enseñanza-aprendizaje de la función cuadrática y en particular el desarrollo de la habilidad para transferir entre sus diferentes formas de representaciones?
2. ¿Cuál es el estado actual del desarrollo de la habilidad para transferir entre las diferentes representaciones de la función cuadrática de los alumnos de noveno grado en la ESBU “Mártires de la Sierpe”?
3. ¿Qué sistema de ejercicios concebir para contribuir al desarrollo de la habilidad para transferir entre las representaciones de la función cuadrática de los alumnos de noveno grado?
4. ¿Qué resultados se obtienen al aplicar el sistema de ejercicios elaborados para contribuir al desarrollo de la habilidad para transferir entre las representaciones de la función cuadrática de los alumnos de noveno grado en la ESBU “Mártires de la Sierpe”?

Para el desarrollo de la investigación se realizaron las tareas científicas siguientes:

1. Determinación de los fundamentos teórico-metodológicos que sustentan el proceso de enseñanza-aprendizaje de la función cuadrática y en particular el desarrollo de la habilidad transferir entre sus diferentes formas de representaciones.
2. Diagnóstico del estado actual del desarrollo de la habilidad transferir entre las diferentes representaciones de la función cuadrática de los alumnos de noveno grado en el ESBU “Mártires de la Sierpe”.

3. Elaboración del sistema de ejercicios para contribuir al desarrollo de la habilidad para transferir entre las diferentes representaciones de la función cuadrática de los alumnos de noveno grado.

4. Valoración de los resultados que se obtienen al aplicar las tareas docentes elaboradas para contribuir al desarrollo de la habilidad transferir entre las diferentes formas de representaciones de la función cuadrática de los alumnos de 9^{no} grado en la ESBU “Mártires de la Sierpe”.

Para la realización de la investigación se utilizó como población a los 127 alumnos de 9. grado de la ESBU mencionada, seleccionando como muestra intencional a los 33 alumnos del grupo 9.1 ya que los mismos poseen características similares respecto al aprendizaje de manera general, las que más adelante se analizan.

Los métodos que se emplearon durante el desarrollo de esta investigación fueron los siguientes:

Del nivel teórico se utilizaron el analítico – sintético, el inductivo - deductivo y el histórico-lógico para el estudio de las fuentes de información, extraer de ellas regularidades y tendencias relacionadas con el aprendizaje de la función cuadrática, particularmente el desarrollo de la habilidad para transferir entre sus diferentes representaciones y para fundamentar el problema de investigación. Igualmente permitieron estudiar las particularidades de uso de las tecnologías de la informática en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática.

Del nivel empírico se utilizó la prueba pedagógica para constatar el estado del desarrollo de la habilidad para “transferir entre las representaciones de la función cuadrática” en los alumnos; la observación, para apreciar el desempeño de los alumnos ante las tareas dirigidas a transferir entre las distintas representaciones de la función cuadrática; El análisis documental permitió valorar en los documentos del Mined lo relacionado con el proceso de enseñanza aprendizaje de la función cuadrática y en particular con la transferencia entre sus representaciones.

Se utilizaron, además, los métodos de la estadística descriptiva para procesar los resultados del diagnóstico aplicado a los alumnos y de la implementación del sistema de ejercicios.

La importancia de la propuesta que se realiza consiste en que responde a un problema de aprendizaje que se presenta en los alumnos de noveno grado de la ESBU “Mártires de la Sierpe”. Se aporta un sistema de ejercicios que contribuyen al desarrollo de la habilidad para transferir entre las diferentes representaciones de la función cuadrática y enriquecen los que aparecen en el libro de texto para el grado y favorecen la utilización del software GeoGebra en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las funciones cuadráticas.

El informe está estructurado por introducción, desarrollo, constituido por cuatro epígrafes, las conclusiones, la bibliografía y varios anexos.

En el desarrollo se exponen los fundamentos teórico-metodológicos que sustentan el proceso de enseñanza-aprendizaje de la función cuadrática y en particular el desarrollo de la habilidad transferir entre sus diferentes formas de representaciones, se muestra diagnóstico del estado actual del desarrollo de la habilidad transferir entre las diferentes representaciones de la función cuadrática de los alumnos de noveno grado en el ESBU “Mártires de la Sierpe”, se presenta el sistema de ejercicios para contribuir al desarrollo de la habilidad para transferir entre las diferentes representaciones de la función cuadrática de los alumnos de noveno grado, se describe el pre-experimento y se valoran los resultados que se obtienen al implementar el sistema de ejercicios elaborados para contribuir al desarrollo de la habilidad transferir entre las diferentes representaciones de la función cuadrática de los alumnos de 9^{no} grado en la ESBU “Mártires de la Sierpe”.

Desarrollo

2. Fundamentos teóricos y metodológicos de la transferencia entre representaciones de la función cuadrática.

1.1 El proceso de enseñanza-aprendizaje de la función cuadrática en noveno grado

Los componentes del proceso de enseñanza- aprendizaje (PEA) son: objetivos, contenidos, métodos, medios, formas de organización, evaluación, el profesor y los alumnos, a continuación, se hará referencia a algunos de ellos.

Entre los objetivos de la línea directriz “Correspondencias y funciones” en la Secundaria Básica se encuentran (Álvarez, Almeida y Villegas, 2014, p.69):

- Interpretar situaciones de carácter político, económico, social o científico-ambiental, que se modelan mediante funciones lineales y cuadráticas o funciones definidas por tramos a partir de ellas, sobre la base del dominio de sus propiedades y de poder **pasar de una forma de representación a otra** de estas.
- Formular y resolver ejercicios y problemas intramatemáticos, en particular, relativos a la exploración de la dependencia funcional entre magnitudes geométricas, la generalización y fundamentación de relaciones y propiedades de funciones lineales o cuadráticas y la determinación de algunas que satisfagan determinadas condiciones, haciendo una adecuada utilización de la terminología y simbología matemáticas para **representar y comunicar sus ideas y aprovechando las utilidades de asistentes matemáticos**.

El sistema de contenidos correspondiente a la unidad temática “Funciones cuadráticas” que se presenta en el programa de noveno grado es el siguiente: (Mined, 2011, p.48)

- Repaso de los conceptos de función y función lineal. Propiedades.
- El concepto de función cuadrática como una correspondencia definida por la ecuación $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, ($a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$)

- La función $y=f(x)= ax^2$ ($a\neq 0$). Representación gráfica y propiedades. Introducción de los conceptos de dilatación, contracción y reflexión de la parábola que representa gráficamente a la función $y = g(x)= x^2$ respecto al eje de las abscisas.
- Definición del concepto de cero de una función cuadrática. Fórmula para calcular la abscisa del vértice de la parábola.
- Traslación de la parábola en la dirección de los ejes de coordenadas.
- Ejercicios y problemas. Problemas sencillos de optimización.

Entre las **habilidades** a desarrollar se incluyen: (Mined, 2011, p.49)

1. Reconocer que una función cuadrática se define por una ecuación de la forma $y = f(x)= ax^2+bx+c$, ($a, b, c \in \mathbb{R}$, $a\neq 0$), y la indicación de su dominio de definición (con lo cual queda determinado su conjunto imagen) y que su gráfico es una parábola.
2. Determinar el dominio y conjunto imagen de una función cuadrática, asumiendo que el dominio es el subconjunto “más amplio” de \mathbb{R} donde tiene sentido la expresión analítica que define la función f .
3. Calcular valores funcionales de una función cuadrática.
4. Determinar la ecuación de una función cuadrática dada su representación gráfica o los ceros de la función.
5. Esbozar la representación gráfica una función cuadrática dada su ecuación.
6. Determinar los ceros de una función cuadrática.
7. Hallar el valor máximo y el valor mínimo de una función cuadrática.
8. Analizar el crecimiento de una función cuadrática.
9. Esbozar la representación gráfica de funciones cuadráticas dadas por ecuaciones de la forma $y=f(x)=(x+d)^2+ e$, como resultado de traslaciones de la parábola que representa a la función $y=g(x)= x^2$ en la dirección de los ejes de coordenadas.

10. Esbozar el gráfico de una función f del tipo $f(x) = a x^2$ que se obtiene a través de una dilatación, contracción o reflexión respecto al eje x de la gráfica de $f(x)=x^2$.
11. Resolver problemas sencillos de optimización utilizando las propiedades de las funciones cuadráticas.

De estas habilidades guardan una relación estrecha con la transferencia entre las representaciones las identificadas con los números 4, 5, 9 y 10, pero en ninguna de ellas se hace referencia explícita a la habilidad para transferir entre las representaciones de la función cuadrática.

Entre los procedimientos que el alumno debe dominar se encuentran: representar gráficamente la función cuadrática y determinar la ecuación de una función cuadrática dado su gráfico u otros elementos

1.2 Los conceptos de representación y transferencia entre representaciones. Tipos y formas de representación de la función cuadrática. Posibles transferencias entre sus representaciones

Para Castro y Castro (1997, p.96): “Las representaciones son las notaciones simbólicas o gráficas, específicas para cada noción, mediante las que se expresan los conceptos y procedimientos matemáticos, así como sus características y propiedades más relevantes”.

Aseguran, además que “la noción de representación la vinculamos con los signos, notaciones, figuras y expresiones usuales de la matemática, las representaciones forman parte específica de los sistemas matemáticos de signos, incluidos los gráficos” (Castro y Castro: 1997, p.96),

Rico afirma que:

Las representaciones matemáticas se han entendido [...], en sentido amplio, como todas aquellas herramientas —signos o gráficos— que hacen presentes los conceptos y procedimientos matemáticos y con las cuales los sujetos particulares abordan e interactúan con el conocimiento matemático, es decir, registran y comunican su conocimiento sobre las matemáticas. Mediante el trabajo con las representaciones las personas asignan significados y comprenden las estructuras matemáticas, de ahí su interés didáctico. (Rico, 2009, p.4)

Para Flores, Chi, Canul, Cantú y Pastor (2009, p.47): “Una figura geométrica, un enunciado en lengua natural, una fórmula algebraica, una gráfica, son representaciones semióticas que pertenecen a sistemas semióticos diferentes”.

Según Duval:

Todo acceso a los objetos matemáticos (números, funciones...) pasa necesariamente por las representaciones semióticas. Sin embargo, no se puede confundir nunca un objeto matemático y su representación, el objeto puede tener otras tantas representaciones diferentes de las que uno ve. (1999, p.315)

En este trabajo se asume la definición dada por Castro y Castro (1997) planteada en el primer párrafo de este subepígrafe, pues se ajusta a los propósitos del estudio que se está realizando.

Janvier (1987), en sus trabajos sobre el concepto de función considera que las representaciones asociadas al concepto de función se pueden clasificar en cuatro clases (expresión verbal, tabla, gráfica, y expresión analítica) que, aunque idealmente contienen la misma información, ponen en función diferentes procesos cognitivos, cada uno de ellos estrechamente relacionado con los otros (Janvier, 1987, citado por Font, 2001, p.2).

Para Font, (2001),

La representación verbal se relaciona con la capacidad lingüística de las personas, y es básica para interpretar y relacionar las otras tres; la representación en forma de tabla se relaciona con el pensamiento numérico; la representación gráfica se conecta con las potencialidades conceptualizadoras de la visualización y se relaciona con la geometría y la topología; mientras que la expresión analítica se conecta con la capacidad simbólica y se relaciona principalmente con el álgebra. (Font, 2001, p.3)

Por lo que en este trabajo se asume que los tipos de representación de la función cuadrática son: verbal, tabular, gráfica y analítica.

Por ejemplo, la expresión “correspondencia f , que asocia a cada número real la mitad de su cuadrado”, es una representación verbal de la función cuadrática f .

Mediante la siguiente tabla se puede representar también la función f .

x	-2	-1	0	1	2
---	----	----	---	---	---

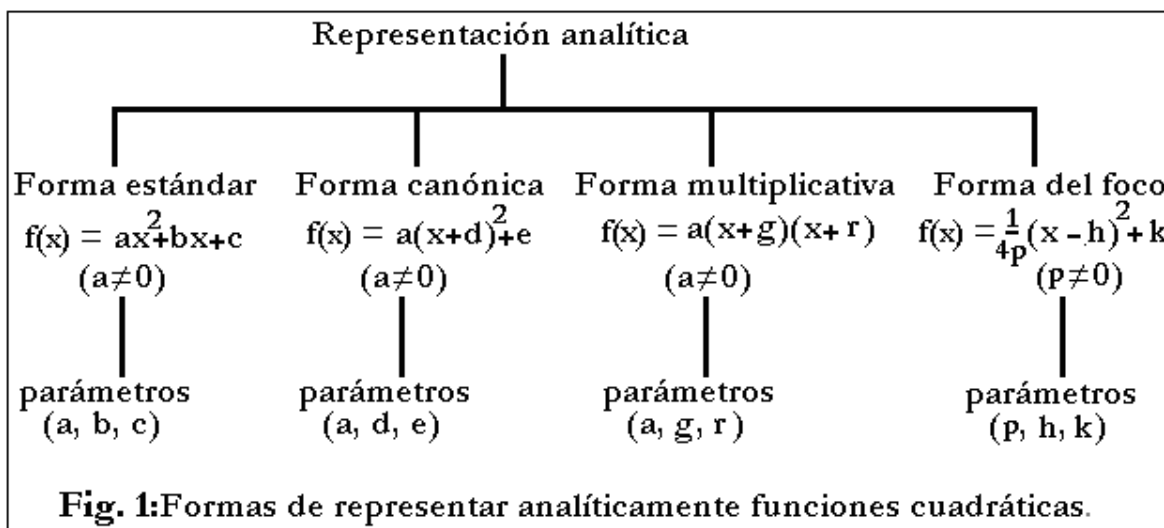
f(x)	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2
------	---	---------------	---	---------------	---

Es importante tener presente lo señalado por Ospina cuando afirma que:

[...] en el registro tabular la función lineal es representada por medio de una tabla de valores, en la cual se ponen en correspondencia las variables; sin embargo, tiene las limitaciones de la continuidad ya que se pueden incluir un número finito de valores [...].
(Ospina, 2012, p.13)

La representación tabular es muy útil para pasar de la representación analítica a la gráfica utilizando lápiz y papel. La representación gráfica se realiza en un sistema de coordenadas cartesianas.

Cañizares (2010, p.20) siguiendo las ideas de Gómez (2006), resume las diferentes formas que puede adoptar la representación analítica de una función cuadrática.



En noveno grado no se estudia la forma del foco, pues esta corresponde al onceno grado en la unidad “Curvas de segundo grado”. La forma multiplicativa solo existe cuando la función tiene ceros, en caso contrario no es posible realizar la transferencia donde la representación buscada sea de forma multiplicativa.

En este trabajo se asume, en correspondencia con lo planteado por Quero y Ruiz (2015), que “la transferencia en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las

funciones cuadráticas es un proceso que permite, dada una representación de una función cuadrática, obtener otra representación de esa función “.

Para realizar el proceso de transferencia el alumno dispone de determinados medios que pueden ser *lápiz y papel* o un *software*, por lo que en este trabajo se utilizarán las expresiones “*transferencia con lápiz y papel*” y “*transferencia con software*” según sean los medios utilizados.

Ospina afirma que en los estudios relacionados con las funciones “se evidencia la importancia del uso de múltiples representaciones en la conceptualización del objeto matemático función y la tecnología como componente que promueve una interacción simultánea entre varios registros de representación [...], lo cual favorece a una mejor comprensión” (Ospina, 2012, p.30).

Si se etiquetan las formas de representación con siglas y se utiliza una flecha como símbolo de la transferencia, se pueden determinar los casos de transferencias entre representaciones de la función cuadrática.

Asumiendo que **V** denota las representaciones verbales; **C**, la representación canónica; **E**, la estándar y **G**, la gráfica y aplicando el principio de multiplicación de la teoría combinatoria se puede concluir que existen 12 posibles transferencias entre las representaciones de la función cuadrática.

1) **V**→**E**, 2) **E**→**V**, 3) **C**→**V**, 4) **G**→**V**, 5) **V**→**C** 6) **E**→**C** 7) **C**→**E**, 8) **G**→**E**
9) **V**→**G**, 10) **E**→**G**, 11) **C**→**G**, 12) **G**→**C**.

De estas posibles transferencias se han encontrado en el libro de texto ejercicios relacionados con las identificadas con los números 1, 5, 9, 10, 11, 12, pero existen algunos tipos de transferencias que no se usan en los ejercicios y en los ejemplos que en este libro aparecen y no se aprovechan al máximo las potencialidades del software GeoGebra en la elaboración de los ejercicios ya que solo existen dos que tratan sobre este software y es sobre un solo tipo de transferencia. (Anexo 3)

1.3. La habilidad para la transferencia entre representaciones

El término habilidad es utilizado como sinónimo de “saber hacer” (González y otros, 2001)

Para González y otros, las habilidades “constituyen el dominio de operaciones que permiten una regulación racional de la actividad” (2001, p.117)

Por habilidad de alguien para ejecutar un procedimiento se asume la definición expuesta por Ruiz (2009, p.3):

[...] la habilidad de una persona para ejecutar un procedimiento, es una formación psicológica predominantemente ejecutora, donde se integran lo afectivo y lo cognitivo en el dominio efectivo [expresado como el grado en que el resultado de la ejecución del procedimiento coincide con el objetivo], eficaz [concebido como la permanencia temporal de la habilidad correspondiente] y eficiente [referido al grado de aprovechamiento de los recursos y los medios por el ejecutor] de este procedimiento, expresado en una ejecución rápida y consciente para cumplir un objetivo en cada situación en que su aplicación sea pertinente. (Citado por Cañizares, 2010, p.11)

También se está de acuerdo con Ruiz cuando afirma que:

La formación en una persona de la habilidad para ejecutar un procedimiento se asume como el proceso mediante el cual, con la ayuda de otros, esta se apropia de los conocimientos necesarios para hacerlo y lo ejecuta independientemente con un mínimo de rapidez respecto a la posible, en tareas del mismo tipo que las resueltas con la ayuda de otros y en situaciones similares a las presentadas con anterioridad, de manera que se puede afirmar que una habilidad se ha formado cuando el ejecutor además de poseer los conocimientos necesarios, incluidos los referidos al procedimiento, tiene un dominio efectivo de este en tareas análogas a las resueltas con ayuda (Citado por Cañizares, 2010, p.11).

Respecto al desarrollo de la habilidad para ejecutar un procedimiento Ruiz plantea:

Es el proceso en el cual la persona va perfeccionando el dominio del procedimiento mediante el aumento de su grado de efectividad, eficacia y eficiencia, debido al efecto de su aplicación en nuevas situaciones y tareas en función de disminuir el número de errores en la ejecución y utilizar adecuadamente los medios disponibles, obteniendo el resultado con el mínimo de esfuerzo posible (Citado por Cañizares, 2010, p.5).

En este trabajo se asume lo planteado por Cañizares cuando afirma que

Un alumno tiene formada la habilidad para transferir entre representaciones de funciones cuando: 1) conoce el procedimiento que debe ejecutar para lograr la transferencia, 2) logra

obtener mediante la ejecución del procedimiento la representación buscada en tareas similares a las resueltas, con cierto grado de aproximación y un mínimo de rapidez respecto a la posible y consciente de su actuación, 3) muestra interés por ejecutar el procedimiento y 4) presta atención a la explicación del profesor. (2010, p.48)

El procedimiento general para transferir entre las representaciones de la función cuadráticas que se propone en este trabajo se corresponde con el propuesto por Cañizares (2010, p.47), pero con algunas modificaciones. Las acciones del procedimiento son:

1. Identificar el tipo y la forma de la representación dada y de la representación buscada.
2. Elegir los medios a utilizar para realizar la transferencia.
3. Determinar el procedimiento específico para realizar la transferencia.(estos procedimientos dependen del tipo y la forma de las representaciones dadas y buscadas)
4. Ejecución del procedimiento determinado.
5. Análisis retrospectivo y prospectivo.

2 Diagnóstico del nivel de desarrollo de la habilidad para la transferencia entre representaciones de la función cuadrática.

Para diagnosticar el nivel de desarrollo de la habilidad para la transferencia entre representaciones de la función cuadrática en los alumnos de noveno grado de la ESBU “Mártires de la Sierpe” se aplicó una prueba pedagógica a una muestra de 27 alumnos (anexo 1) cuyos resultados se muestran en el anexo 2.

Los principales resultados obtenidos fueron:

- El 96,3% (26) de los alumnos se esforzó por responder las preguntas realizadas y solo el 3,7% (1) entregó la prueba sin responder.
- Ningún alumno transfirió correctamente de la representación verbal de la función cuadrática a la representación analítica.
- El 55,6 % (15) de los alumnos transfirió correctamente de la representación analítica a la verbal, aunque varios de ellos cometen imprecisiones en el uso de la terminología matemática.

- El 55,6% (15) de los alumnos no transfirió correctamente de la representación gráfica a la analítica.
- El 48,1% (13) de los alumnos no transfirió correctamente de la representación analítica (estándar) a la gráfica, aunque ninguno muestra dominio del procedimiento descrito en el libro de texto. Ningún alumno determinó las coordenadas de otros puntos de la parábola que no fuera el vértice.
- Solo el 3,7 % (1) de los alumnos dice haber utilizado el software GeoGebra en las clases de Matemática y no explica para qué lo ha utilizado.

3 Sistema de ejercicios para favorecer el desarrollo de la habilidad para transferir entre las representaciones de la función cuadrática

Son varios los autores que han definido el concepto ejercicio en el contexto del PEA de la Matemática (Muller, 1987; Jungk, 1999; Friedman, 1982 y Ballester y otros, 1992).

Para Ballester y otros, “Un ejercicio matemático está formado por tres componentes que son: la situación inicial (los elementos que se dan, premisas), la vía de solución (las transformaciones que hay llevar a cabo para resolverlo) y la situación final (elementos que se buscan, tesis)” (1992, p.120).

El colectivo de autores antes mencionado destaca que "con el objetivo didáctico con que se les utiliza los ejercicios pueden ser clasificados en:

- 1.- Ejercicios para la introducción de nuevos conocimientos.
- 2.- Ejercicios para el desarrollo de habilidades y hábitos.
- 3.- Ejercicios para desarrollar el pensamiento de los alumnos.
- 4.- Ejercicios para el control”. (Ballester y otros, 1992, p. 129-130)

Los ejercicios desempeñan diferentes funciones en el PEA de la Matemática, al respecto se plantea en las Orientaciones Metodológicas para el séptimo grado “[...], es provechoso considerar como funciones rectoras de los ejercicios, las instructivas, educativas y de desarrollo. Además de estas funciones los ejercicios tienen otra función de gran importancia que es la función de control del aprendizaje” (Muñoz, Agüero, López, Guerra y Marrero, 1989, p.8).

Muñoz y otros (1989, p. 11) consideran que un sistema de ejercicios encaminado a la asimilación de un procedimiento debe incluir ejercicios dirigidos a:

- Organizar la asimilación de los distintos procedimientos que forman parte de uno más complejo que es objeto de estudio.
- Aplicar el procedimiento conjuntamente con otros ya estudiados.
- Lograr que no se cree un estereotipo en los alumnos con relación a un procedimiento aprendido.

Agregan, los autores antes citados, que para seleccionar los ejercicios que conformarán un sistema se deben tener en cuenta otros aspectos, entre ellos:

- Las funciones que pueden desempeñar y qué objetivos se proponen alcanzar con cada uno de los ejercicios.
- Si los alumnos pueden resolver el ejercicio de forma independiente y qué conocimientos y habilidades son necesarios para su resolución.
- En qué aspectos y en qué medida se debe brindar ayuda a los alumnos.
- Cómo cada ejercicio se relaciona con los contenidos estudiados y con los que se estudiarán posteriormente.

El sistema de ejercicios que se presenta en este epígrafe ha sido concebido por el autor para su utilización en el proceso de enseñanza-aprendizaje tanto en la clase como fuera de ella y pretende complementar los ejercicios que aparecen en el libro de texto de la asignatura para el grado.

Estos ejercicios constituyen un sistema pues contribuyen a la asimilación de procedimientos particulares que favorecen la fijación del procedimiento general para la transferencia entre representaciones de la función cuadrática, al ejecutar los procedimientos particulares se aplican otros procedimientos estudiados con anterioridad y no favorecen la creación de estereotipos en los alumnos.

Atendiendo a las posibles transferencias identificadas anteriormente, los ejercicios que se proponen se han dividido en los tipos que se muestran en la tabla siguiente:

Tabla 1: Tipos de ejercicios para la transferencia entre las representaciones de
--

la función cuadrática.		
Tipo	Representación dada	Representación buscada
1	Verbal	Estándar
2	Estándar	Verbal
3	Canónica	Verbal
4	Gráfica	Verbal
5	Verbal	Canónica
6	Estándar	Canónica
7	Canónica	Estándar
8	Gráfica	Estándar
9	Verbal	Gráfica
10	Estándar	Gráfica
11	Canónica	Gráfica
12	Gráfica	Canónica

Los ejercicios que forman este sistema se caracterizan por:

- Incluyen todas las transferencias posibles entre las representaciones de la función cuadrática que se estudian en noveno grado.
- Favorecen el uso del software GeoGebra en el proceso de transferencia.

El sistema de ejercicios elaborado se corresponde con la unidad # 4 de noveno grado: Trabajo con variables, ecuaciones de segundo grado y funciones cuadráticas, que consta de 53 h/c y abarca específicamente el epígrafe 4.3: Funciones cuadráticas, a la cual se le dedican 14 h/c. El mismo se aplicó durante la planificación y ejecución de las clases correspondientes.

Otros docentes del grado podrán realizar un nuevo análisis de las sugerencias que se ofrecen teniendo en cuenta los resultados del proceso de enseñanza-aprendizaje, aspecto que permitirá su perfeccionamiento.

Este sistema de ejercicios se distingue por centrar la atención en la transferencia de la función cuadrática, haciendo énfasis en que los alumnos logren utilizar diferentes formas de representación para un mismo contenido matemático.

A partir de las ideas analizadas se presenta a continuación el sistema de ejercicios que se ha organizado atendiendo a los niveles de dificultad y al orden en que se imparte el contenido en el grado.

Ejercicio 1: Representa gráficamente las siguientes funciones, utilizando lápiz y papel y el software GeoGebra (*Tipos 10 y 11*):

$$a) y = 2x^2$$

$$b) g(x) = -2x^2$$

$$c) f(x) = 4x^2$$

$$d) h(x) = -4x^2$$

Ejercicio 2: Representa gráficamente las siguientes funciones, utilizando lápiz y papel y el software GeoGebra (*Tipos 10 y 11*):

$$a) y = \frac{1}{2}x^2$$

$$b) y = -\frac{1}{2}x^2$$

$$c) y = \frac{1}{4}x^2$$

$$d) y = -\frac{1}{4}x^2$$

Ejercicio 3: Dadas las ecuaciones de las siguientes funciones, escriba su representación verbal: (*Tipo 2*)

$$a) y = 2x^2 \qquad c) y = \frac{1}{2}x^2$$

$$b) y = 4x^2 \qquad c) y = \frac{1}{3}x^2$$

Ejercicio 4: Representa gráficamente las siguientes funciones, utilizando lápiz y papel y el software GeoGebra (*Tipos 10 y 11*):

$$a) y = x^2 + 2x - 5$$

$$b) f(x) = -x^2 + 2x - 5$$

c) $g(x) = (x - 4)^2 + 3$

d) $h(x) = (x + 4)^2 + 3$

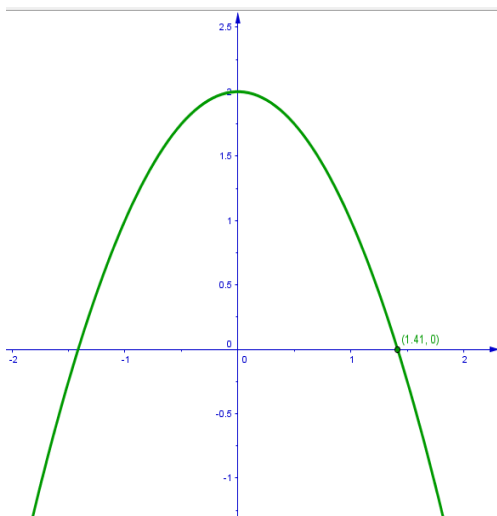
Ejercicio 5: Completa los espacios en blanco para cada una de las funciones siguientes. (Tipos 1, 3 y 5):

a) La función cuya ecuación es $y = (x - 1)^2$, se puede representar en el lenguaje común como “La correspondencia que _____”

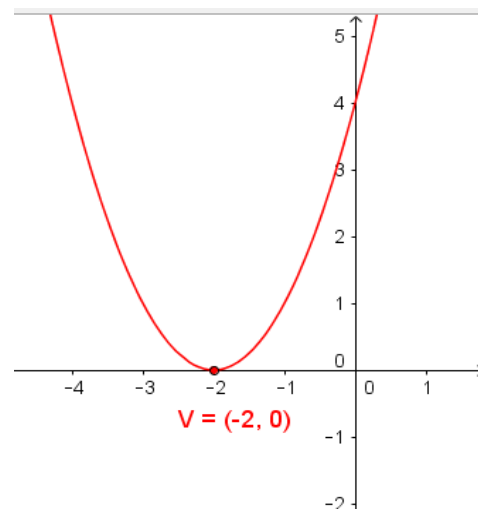
b) La correspondencia que asocia a cada número real su cuadrado, disminuido en dos se puede representar por la ecuación $f(x) =$ _____.

Ejercicio 6: Determina las ecuaciones (canónicas y estándares) de las funciones cuyas representaciones gráficas son las siguientes: (Tipos 8 y 12)

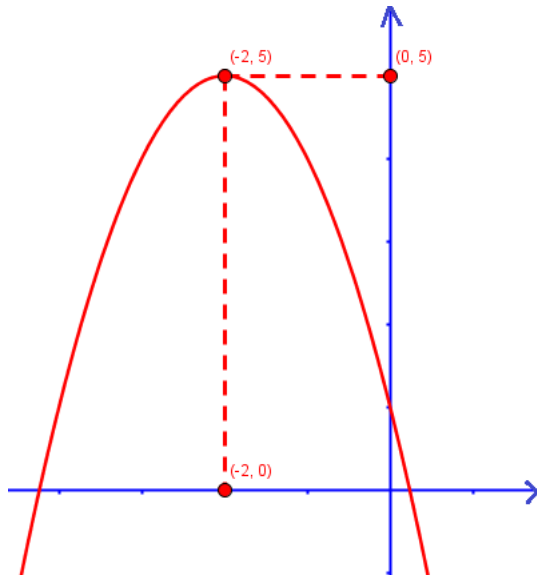
a)



b)

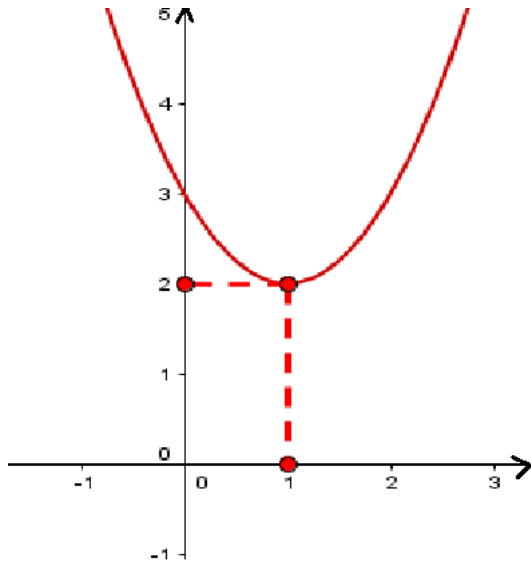


c)



Ejercicio 7: Selecciona la ecuación que le corresponde a la función cuadrática representada gráficamente (*Tipos 8 y 12*):

7.1



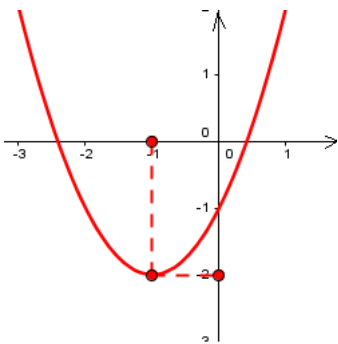
a) $y = (x+1)^2 + 2$

b) $y = (x+1)^2 - 2$

c) $y = (x-1)^2 + 2$

d) $y = (x-1)^2 - 2$

7.2



a) $y = x^2 + 2x - 1$ b) $y = -x^2 + 2x - 1$ c) $y = x^2 - 2x - 1$

d) $y = -x^2 - 2x + 1$

Ejercicio 8: Dadas las siguientes funciones mediante sus ecuaciones:

a) $y = (x-2)^2 + 3$

b) $f(x) = (x+3)^2$

c) $h(x) = (x+1)^2 + 2$

d) $g(x) = (x-5)^2 + 1$

8.1 Exprésalas en la forma $y = ax^2 + bx + c$ (Tipos 7)

8.2 Representa con el software GeoGebra las funciones anteriores en sus dos formas de representación y compáralas. (Tipos 10 y 11)

Ejercicio 9: Representa gráficamente las funciones cuadráticas siguientes: (Tipo 9)

- a) La función cuyo gráfico tiene el vértice en el punto $V(2;1)$ y pasa por el punto $A(1;2)$
- b) La función cuyo gráfico tiene el vértice en el punto $V(0;2)$ y pasa por el punto $A(1;1)$
- c) La función cuyo gráfico tiene el vértice en el punto $V(0;-2)$ y pasa por el punto $A(1;-1)$

Ejercicio 10: Transforma las ecuaciones de las siguientes funciones a la forma $y=(x+d)+e$ (Tipo 6)

a) $y = x^2 + 2x + 1$

b) $y = x^2 + 3x - 1$

c) $y = x^2 - 2x + 1$

d) $y = x^2 + 3x + 2$

e) $y = x^2 - 3x + 2$

- Representa gráficamente estas funciones utilizando lápiz y papel y el software GeoGebra. (Tipos 10 y 11)

Ejercicio 11: Escribe las ecuaciones de las funciones siguientes en la forma que aparece dentro del paréntesis: (Tipos 6 y 7)

a) $y = x^2 + 2x + 1$ ($y = (x+d)^2 + e$)

b) $y = -x^2 - 2x - 1$ ($y = (x+d)^2 + e$)

c) $f(x) = (x+3)^2 + 1$ ($y = ax^2 + bx + c$)

d) $h(x) = (x-3)^2 + 1$ ($y = ax^2 + bx + c$)

4 La implementación del sistema de ejercicios

Para responder la cuarta pregunta científica de la investigación se diseñó el proceso de implementación del sistema de ejercicios para favorecer la transferencia entre representaciones de la función cuadrática. La implementación se realizó con el propósito de valorar en qué medida el sistema de ejercicios contribuye al desarrollo de la habilidad para transferir entre las representaciones de la función cuadrática.

La implementación se efectuó en la ESBU “Mártires de la Sierpe” del municipio La Sierpe, centro educacional donde realiza la práctica laboral el autor del trabajo y donde se ejecuta la investigación.

Antes de proceder a la implementación del sistema de ejercicios se preparó, por parte del autor, a la profesora de noveno grado encargada de utilizar el sistema de ejercicios en el PEA de la función cuadrática del grupo seleccionado.

La implementación del sistema de ejercicios se realizó mediante un pre-experimento pedagógico en la modalidad de “diseño con grupo de control no equivalente y medida post” (Borges, 2006, p.174).

Para tratar de controlar las posibles diferencias entre los grupos existentes antes del pre-experimento se utilizaron los resultados del primer trabajo de control parcial para formar parejas de alumnos (uno de cada grupo) donde la calificación del alumno del grupo 1 fuera igual o superior al del alumno del grupo 2, con la excepción de cuatro parejas donde la calificación del alumno del grupo 2 supera en 0,4 puntos a la del grupo 1 y se excluyeron de la muestra los alumnos que no formaron parte de estas parejas.

Es de destacar que la calificación promedio de los alumnos seleccionados del grupo de control es de 36,5 puntos y la del grupo experimental es de 34,7.

El grupo de control quedó formado por 29 alumnos del grupo 9.1 y el experimental por igual cantidad de alumnos del grupo 9.2.

La implementación la realizó la profesora del grado en las clases correspondientes a la unidad 4 “Trabajo con variables, ecuaciones de segundo grado y funciones cuadráticas”, durante 14 clases en un período de

aproximadamente 3 semanas. Los ejercicios del sistema se utilizaron en las clases y como parte del estudio independiente (Anexo 14).

Los alumnos **se caracterizan** por asistir puntualmente a clases y presentan una buena disciplina en las clases.

En la investigación se consideró como variable independiente la aplicación del sistema de ejercicios en el PEA de la función cuadrática y como variable dependiente el nivel de desarrollo de la habilidad para la transferencia entre las representaciones de la función cuadrática.

La variable dependiente se operacionalizó mediante los siguientes **indicadores**:

- 1.-Conocimiento de los pasos del procedimiento.
- 2.- Ejecución del procedimiento.
- 3.- Interés por resolver los ejercicios propuestos.
- 4.- Atención prestada a las explicaciones del profesor

Para su medición se utilizó una **escala ordinal** que considera las categorías Alto (A), Medio (M) y Bajo (B); en el anexo 5 se muestra la matriz de valoración para cada indicador.

Los métodos utilizados para la medición de los indicadores se muestran en la tabla siguiente:

Indicador	Método	Anexo
1.-Conocimiento de los pasos del procedimiento.	Observación y prueba pedagógica	4 y 5
2.- Ejecución del procedimiento.	Prueba pedagógica	4
3.- Interés por resolver los ejercicios propuestos.	Observación	5
4.- Atención prestada a las explicaciones del profesor	Observación	5

La medición de los indicadores 1, 3 y 4 se realizó durante el período de realización del pre-experimento por parte del investigador y de la profesora que implemento la propuesta mediante la observación del desempeño de los alumnos.

La aplicación de una prueba pedagógica, al finalizar la impartición del contenido correspondiente a la función cuadrática, permitió la medición del indicador 2 y contribuyó a la evaluación del indicador 1.

La prueba contenía varias preguntas en las que se exigía transferir entre las representaciones de las funciones cuadráticas, por lo que para evaluar el indicador “Ejecución del procedimiento” se procedió de la siguiente forma:

- Se determinó la escala de medición para cada ítem, en este caso una escala ordinal de tres categorías (alto (A), medio (M) y bajo (B)).
- Se elaboraron los criterios para asignar la categoría a cada ítem (Anexo 6).
- Se asignó a cada alumno una categoría para cada ítem (Anexo 7)
- Se calculó el índice para el indicador a cada alumno (Anexo 7) (Zadu, 2004).
- Se convirtió el índice, de cada alumno, a la escala ordinal de tres categorías (A, M, B), considerando que si el índice está en el intervalo [0; 5] se considera bajo, para el intervalo (5; 7] es medio y para (7; 10] es alto. (Anexo 7)

Resultados de la medición de los indicadores en el grupo experimental

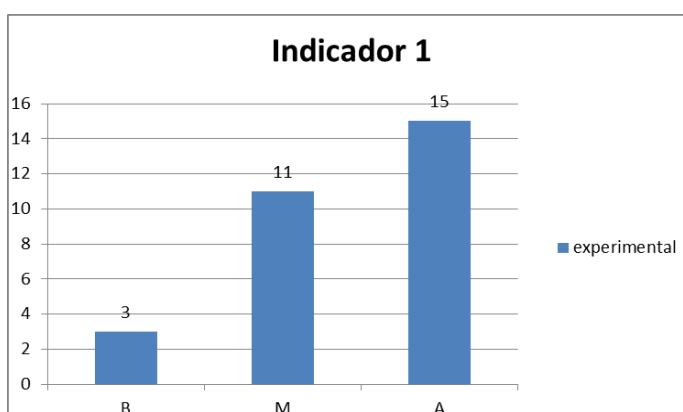
En el anexo 8 se muestran los resultados de cada alumno por indicadores.

Indicador 1: Conocimiento de los pasos del procedimiento

En la tabla de frecuencias y el gráfico se muestran los resultados de la medición de este indicador en el grupo experimental.

El 51,7 % (15) de los alumnos conoce todos los pasos de los procedimientos evaluados, el 37,9% (11) de los alumnos desconoce uno de los pasos de los procedimientos evaluados y solo el 10,3 % (3) de los alumnos desconoce al menos dos de los pasos de los procedimientos evaluados.

Categorías	FA	FR (%)
Bajo	3	10,3
Medio	11	37,9



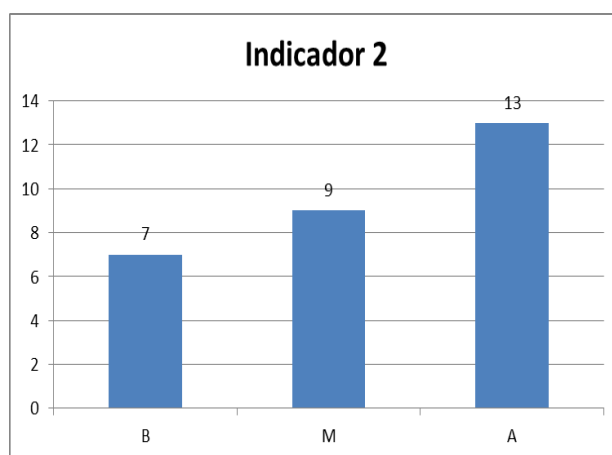
Alto	15	51,7
Total	29	100

Indicador 2: Ejecución del procedimiento.

En la tabla de frecuencias y el gráfico se muestran los resultados de la medición de este indicador en el grupo experimental.

El 44,8 % (13) de los alumnos ejecuta correctamente los procedimientos de transferencia evaluados, el 31,0% (9) de los alumnos comete imprecisiones en la ejecución del procedimiento, pero obtiene la representación buscada y solo el 24,1% (7) de los alumnos comete errores en la ejecución de los procedimientos que le impiden obtener la representación buscada.

Tabla de frecuencias del indicador 2		
Categorías	FA	FR (%)
Bajo	7	24,1
Medio	9	31,0
Alto	13	44,8
Total	29	100

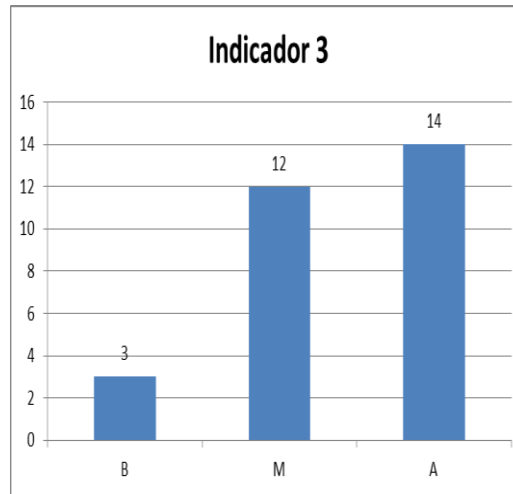


Indicador 3: Interés por resolver los ejercicios propuestos.

En la tabla de frecuencias y el gráfico se muestran los resultados de la medición de este indicador en el grupo experimental.

El 48,3 % (14) de los alumnos comienza a resolver los ejercicios cuando el profesor los orienta, sin necesidad de impulsos y solicita nuevos ejercicios cuando concluye los asignados por el profesor, el 41,4% (12) de los alumnos comienza a resolver los ejercicios cuando el profesor los orienta, pero necesita impulsos o no solicita nuevos ejercicios cuando concluye los asignados por el profesor y solo el 10,3 % (3) de los alumnos no comienza a resolver los ejercicios cuando el profesor los orienta y solo lo hace cuando el profesor insiste en que los resuelva..

Tabla de frecuencias del indicador 3		
Categorías	FA	FR (%)
Bajo	3	10,3
Medio	12	41,4
Alto	14	48,3
Total	29	100,0

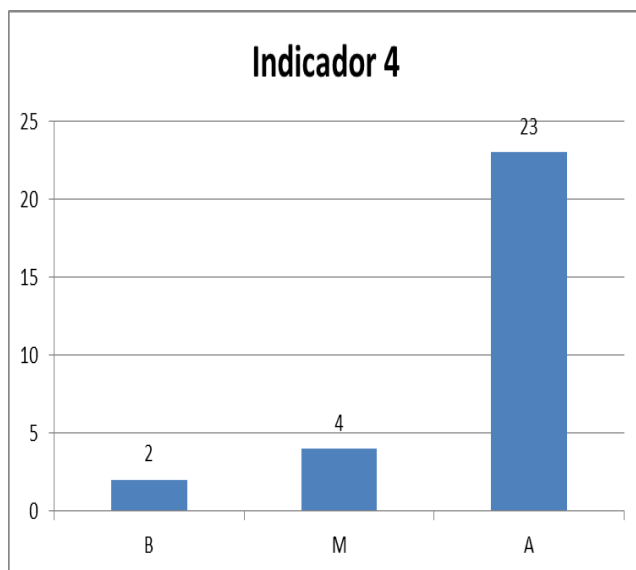


Indicador 4: Atención prestada a las explicaciones del profesor.

En la tabla de frecuencias y el gráfico se muestran los resultados de la medición de este indicador en el grupo experimental.

El 79,3 % (23) de los alumnos atiende de forma voluntaria a las explicaciones del profesor, el 13,8% (4) de los alumnos atiende las explicaciones solo cuando el profesor lo solicita y solo el 6,9% (2) de los alumnos no presta la mayor atención, aunque el profesor lo solicite.

Tabla de frecuencias del indicador 4		
Categorías	FA	FR (%)
Bajo	2	6,9
Medio	4	13,8
Alto	23	79,3
Total	29	100,0



Resultados de la comparación de la medición de los indicadores en los grupos experimental y de control

Debido a que no era factible aplicar un pre-test, no se puede asegurar que las diferencias encontradas en el pos-test sean consecuencias de la implementación del sistema de ejercicios. En el anexo 9 se muestran los resultados del grupo de control.

Indicador 1: Conocimiento de los pasos del procedimiento

Como se muestra en el Anexo 10, en este indicador no se aprecian diferencias significativas entre los resultados de la medición en los grupos de control y experimental.

Indicador 2: Ejecución del procedimiento.

En este indicador se observan diferencias significativas entre los resultados de ambos grupos (Anexo 11).

Existen 8 (+27,6%) alumnos más del grupo experimental que obtienen la categoría de alto en este indicador respecto al grupo de control y 4 (-13,8%) alumnos menos que se ubican en la categoría bajo respecto al grupo de control.

Indicador 3: Interés por resolver los ejercicios propuestos.

En este indicador se observan diferencias entre los resultados de ambos grupos (Anexo 12).

Existen 6 (-20,7%) alumnos menos del grupo experimental que obtienen la categoría de alto en este indicador respecto al grupo de control y la cantidad de alumnos que se ubican en la categoría bajo es la misma en ambos grupos.

Indicador 4: Atención prestada a las explicaciones del profesor.

En este indicador se observan diferencias significativas entre los resultados de ambos grupos (Anexo 13).

Existen 5 (+17,2%) alumnos más del grupo experimental que obtienen la categoría de alto en este indicador respecto al grupo de control y 2 (-6,9%) alumnos menos que se ubican en la categoría bajo respecto al grupo de control.

CONCLUSIONES

El estudio realizado permitió identificar los fundamentos teórico-metodológicos que sustentan el proceso de enseñanza-aprendizaje de la función cuadrática y en particular de la habilidad para transferir entre sus diferentes formas de representaciones.

Dentro de estos fundamentos se encuentran: el concepto representación, los tipos y formas de representación de la función cuadrática y el concepto de transferencia entre las representaciones de la función cuadrática.

En el diagnóstico inicial del nivel de desarrollo de la habilidad para transferir entre las representaciones de la función cuadrática en los alumnos del noveno grado de la ESBU Mártires de la Sierpe se determinó que estos muestran disposición para aprender y perseverancia ante las tareas planteadas.

También se identificaron limitaciones relacionadas con el desarrollo de la habilidad para transferir entre las diferentes representaciones, entre ellas se encuentran: ningún alumno transfirió correctamente de la representación verbal a la analítica, solo la mitad de ellos lo hizo correctamente de la analítica a la verbal, aunque varios cometieron imprecisiones en el uso de la terminología matemática. Las transferencias de la representación gráfica a la analítica y de la analítica a la gráfica la realizan correctamente un porcentaje que no supera al 60% y solo el 3,7% dice haber utilizado el software GeoGebra en las clases de Matemática.

El estudio realizado permitió identificar las 12 posibles transferencias a realizar entre las representaciones de las funciones cuadráticas y elaborar un sistema de ejercicios dirigidos a favorecer el desarrollo de la habilidad para la transferencia que complementan las que aparecen en el libro de texto.

Los resultados obtenidos durante la realización del pre-experimento pedagógico demostraron que el sistema de ejercicios para favorecer la transferencia entre representaciones de la función cuadrática contribuyó al desarrollo de la habilidad para la transferencia entre las representaciones de la función cuadrática en los alumnos de noveno grado de la ESBU Mártires de la Sierpe.

RECOMENDACIONES

- ✓ Se recomienda continuar profundizando en el estudio de las transferencias entre representaciones de la función cuadrática en los alumnos de noveno grado.
- ✓ Enriquecer la propuesta del sistema de ejercicio para el tratamiento de la transferencia de la función cuadrática.
- ✓ Socializar el sistema de ejercicio elaborado en sesiones de trabajo metodológico de la escuela.

Bibliografía

1. Acosta, S. y otros (2015): Matemática noveno grado. La Habana. Cuba: Pueblo y Educación.
2. Álvarez, M, Almeida, B y Villegas, E. (2014). El proceso de enseñanza-aprendizaje de la asignatura Matemática. Documentos metodológicos. La Habana, Cuba: Pueblo y Educación.
3. Ballester, Sergio y otros (1992). Metodología de la Enseñanza de la Matemática. Tomo 1. La Habana. Cuba: Pueblo y Educación.
4. Borges, A. (2006). Diseños de investigación en psicología. Curso para la formación de psicólogos. Recuperado de <http://webpages.ull.es/users/aborges>
5. Cañizares, E. (2010). La Formación y Desarrollo de la Habilidad para Transferir entre Representaciones Analíticas y Gráfica de Funciones Cuadráticas en Estudiantes de Décimo Grado (Tesis de maestría). Universidad de Ciencias Pedagógicas "Silverio Blanco Núñez". Sancti Spíritus, Cuba.
6. Castro, Encarnación y Castro, Enrique (1997). Representaciones y Modelización en La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria coordinado por L. Rico. Barcelona. España: Horsori.
7. Duval, R. (2002) Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. En F. Hitt, (Ed.), Representations and Mathematics Visualization (pp. 311-335). North American Chapter of PME: Cinvestav-IPN.
8. Flores, C., Chi, A., Canul E., Cantú, C. y Pastor, C. (2009). De las descripciones verbales a las representaciones gráficas. El caso de la rapidez de la variación en la enseñanza de la matemática. Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 18, 41-57. Recuperado de: <http://www.fisem.org/paginas/union/revista.php>
9. Font, V. (2001). Algunos puntos de vista sobre las representaciones en didáctica de las matemáticas. Philosophy of Mathematics Education Journal, 14, 1-35. Recuperado de <http://www/Hvfont@d5.ub.es>

10. Font, V. (2001a). Expresiones simbólicas a partir de gráficas. El caso de la parábola. *EMA*, 10 (2), pp180 15.
11. Fridman, Lev M. (1993). “*Cómo enseñar a resolver problemas*”. Traducción y edición Universidad de Sonora. México.
12. Godino, J, Batanero, C y Font, V. (2003). Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros. Recuperado de: <http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/>
13. Gómez, M. (2005): Una propuesta didáctica para elevar los niveles de transferencia entre las distintas representaciones de las funciones, en el nivel preuniversitario (Tesis doctoral). Instituto Superior Pedagógico “Enrique J. Varona”. La Habana, Cuba
14. Gómez, P. y Rico, L. (2002). Análisis didáctico, conocimiento didáctico y formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. Recuperado de <http://cumbia.ath.cx/lr.htm>
15. González, V. y otros (2001): *Psicología para educadores*. La Habana: Pueblo y Educación.
16. Hitt, F. (2001). El papel de los esquemas, las conexiones y las representaciones internas y externas dentro de un proyecto de investigación en Educación Matemática. En P. Gómez y L. Rico (Eds.), *Iniciación a la Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje al Profesor Mauricio Castro* (pp. 165-178). Granada, España: Editorial Universidad de Granada. Recuperado de <http://cumbia.ath.cx/ugr/phmc/PDF/Hitt.pdf>
17. Instituto Nacional de Calidad y Evaluación (2000): Marcos teóricos de PISA 2000. España. Recuperado de: <http://www.ince.mec.es/diag/mat16.htm>
18. Jungk, W (1979) Conferencias sobre Metodología de la Enseñanza de la Matemática 1. La Habana. Cuba: Pueblo y Educación.
19. Jungk, W (1985). Conferencias sobre Metodología de la Enseñanza de la Matemática 2 (primera parte). La Habana. Cuba: Pueblo y Educación.

20. Leyva, T. (2012). Propuesta didáctica para elevar los niveles de transferencia entre las distintas representaciones de las funciones reales de una variable real, en el tema de funciones en el primer año de la Universidad de Ciencias Informáticas (Tesis de maestría). Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría. La Habana, Cuba.
21. Lupiañez, J y Moreno, L. (2000) Tecnología y representaciones semióticas en el aprendizaje de las matemáticas. En P. Gómez, y L. Rico (Eds.). Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro. Granada: Editorial Universidad de Granada
22. Ministerio de Educación. (2011). Programa de Matemática. Noveno grado. Versión electrónica.
23. Müller, Horst. (1987). "Aspectos metodológicos acerca del trabajo con ejercicios en la enseñanza de la Matemática". Folleto mimeografiado. ICCP. La Habana.
24. Mullis, A. y otros (2003). Marcos teóricos y especificaciones de evaluación de TIMSS 2003. Madrid, España: Instituto Nacional de Calidad y Evaluación. Recuperado de <http://www.ince.mec.es/diag/mat16.htm>
25. Muñoz, F., Agüero, J., López, E., Guerra M. y Marrero, G. (1989). Orientaciones Metodológicas. Matemática. Séptimo grado. La Habana. Cuba: Pueblo y Educación.
26. Ospina, D. (2002): Las representaciones semióticas en el aprendizaje del concepto función lineal (Tesis de maestría). Universidad autónoma de Manizales. Colombia. Recuperada de: <http://repositorio.autonoma.edu.co/jspui/bitstream/11182/245/1/Tesis>.
27. Quero, O. y Ruiz, A. (2015): Procedimientos para la transferencia entre representaciones verbales del plano en la formación de profesores de matemática-física. Trabajo presentado en la III Conferencia Internacional Yayabociencias 2015. Sancti Spíritus, Cuba.
28. Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en Educación Matemática. PNA, 4(1), 1-14.

29. Romero, I (2000). Representación y comprensión en pensamiento numérico. IV Simposio SEIEM. Ponencia invitada al Seminario de Investigación I. Recuperado de: http://www.ugr.es/local/seiem/IV_Simposio.htm.
30. Zadu, I. (2004). Indicadores e índices. Argentina. Recuperado de <http://server2.southlink.com.ar/vap/INDICADORES.htm>

Anexos

Anexo 1: Prueba pedagógica aplicada a los alumnos de noveno grado de la ESBU “Mártires de la Sierpe”

Estimado alumno, estamos realizando una investigación acerca de las funciones cuadráticas y necesitamos que contestes el siguiente cuestionario con la mayor honestidad posible.

Gracias

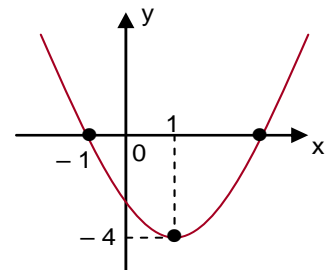
1. Completa los espacios en blanco para cada una de las funciones cuadráticas siguientes:

a) La correspondencia que asocia a cada número real la tercera parte de su cuadrado, disminuido en dos se puede representar por la ecuación:

$f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

b) La función cuya ecuación es $f(x) = x^2 - 2x - 3$ se puede representar en el lenguaje verbal como “la correspondencia que $\underline{\hspace{10cm}}$ ”.

c) La ecuación que corresponde a la función representada mediante el gráfico es: $\underline{\hspace{2cm}}$.



2. Representa gráficamente la función f tal que $f(x) = x^2 - 2x - 3$

3. Selecciona la respuesta que mejor se corresponda con tu opinión

a) He utilizado el software GeoGebra en las clases de Matemática:
___ muchas veces ___ algunas veces ___ muy pocas veces ___ nunca

b) He usado el software GeoGebra en los contenidos de:
___ Estadística ___ Geometría plana ___ Ecuaciones ___ Funciones

Explica para qué has utilizado en software GeoGebra.

Anexo 2: Resultados de la prueba pedagógica aplicada a los alumnos de noveno grado de la ESBU “Mártires de la Sierpe”

# del alumno	Pregunta # 1			Pregunta # 2			Pregunta # 3
	a)	b)	c)	a)	b)	c)	Nunca
1	M	B	B	B	-	-	-
2	M	B	B	B	-	B	-
3	M	B	B	B	-	B	Nunca
4	M	M	M	B	-	B	Nunca
5	M	B	M	B	-	B	Nunca
6	M	B	B	B	-	M	Nunca
7	M	B	-	B	-	-	Nunca
8	M	M	M	B	-	-	Nunca
9	M	M	B	B	-	B	Nunca
10	M	B	B	B	-	B	Nunca
11	M	B	M	B	-	B	Nunca
12	M	B	B	B	-	B	Nunca
13	-	-	-	-	-	-	-
14	M	M	B	B	-	B	Nunca
15	M	M	M	-	-	-	Alguna veces
16	M	-	M	B	-	-	Nunca
17	M	M	M	B	-	-	-
18	M	B	B	B	-	-	Nunca
19	M	B	-	B	-	-	Nunca
20	M	M	M	B	-	-	Nunca
21	M	B	-	B	-	-	-
22	M	B	M	B	-	B	Nunca
23	M	B	B	B	-	B	Nunca
24	M	M	-	B	-	B	-
25	M	M	B	B	-	B	Nunca
26	M	B	-	B	-	-	-
27	M	B	-	M	-	M	Nunca

Nota: Para procesar los resultados de la pregunta 2 se consideraron las siguientes acciones: a) determinar las coordenadas del vértice, b) determinar otros puntos de la parábola y c) representar gráficamente la parábola.

Anexo 3: Diagnóstico de las tareas de transferencia que se presentan en el libro de texto.

Las posibles transferencias entre las representaciones de la función cuadrática

- 1) $V \rightarrow E$, 2) $E \rightarrow V$, 3) $C \rightarrow V$, 4) $G \rightarrow V$, 5) $V \rightarrow C$ 6) $E \rightarrow C$ 7) $C \rightarrow E$, 8) $G \rightarrow E$
 9) $V \rightarrow G$, 10) $E \rightarrow G$, 11) $C \rightarrow G$, 12) $G \rightarrow C$.

	Ejemplos y ejercicios de libro de texto sobre las representaciones:		
	Ejemplos	Ejercicios	
	Uso del software		
1	3	1	
2			
3			
4			
5	1		
6			
7			
8	1	6	
9		1	
10	5	9	2
11		3	
12	1	4	

Anexo 5: Matriz de valoración de los indicadores de la variable independiente.

N.	Indicadores	Alto (10)	Medio (5)	Bajo (0)
1	Conocimiento de los pasos del procedimiento	Conoce los pasos que componen el procedimiento.	Desconoce uno los pasos que componen el procedimiento.	Omite más de un paso del procedimiento.
2	Ejecución del procedimiento.	Ejecuta correctamente el procedimiento.	Comete imprecisiones en la ejecución del procedimiento, pero obtiene la representación buscada.	Comete errores en la ejecución del procedimiento que le impiden obtener la representación buscada.
3	Interés por resolver los ejercicios propuestos.	Comienza a resolver los ejercicios cuando el profesor los orienta, sin necesidad de impulsos, solicita nuevos ejercicios cuando concluye los asignados por el profesor.	Comienza a resolver los ejercicios cuando el profesor los orienta, pero necesita impulsos o no solicita nuevos ejercicios cuando concluye los asignados por el profesor	No comienza a resolver los ejercicios cuando el profesor los orienta y solo lo hace cuando el profesor insiste en que los resuelva.
4	Atención prestada a las explicaciones del profesor.	Atiende de forma voluntaria	Atiende cuando el profesor lo solicita.	No presta la mayor atención, aunque el

				profesor lo solicite.
--	--	--	--	--------------------------

Anexo 6: Criterios para asignar las categorías a cada ítem de la prueba pedagógica

- 1) a) A- Escribe correctamente la ecuación.
B- No escribe la ecuación o lo hace de forma incorrecta.
 - b) A- Escribe correctamente la representación verbal.
M- Comete algunas imprecisiones que no afectan la comprensión.
B- Escribe incorrectamente la representación o no la escribe.
 - c) A- Escribe la ecuación correctamente.
M- Comete un error al escribir el signo de d o de e
B- Escribe incorrectamente la ecuación o no responde.
- 2) A- Realiza correctamente todos los pasos del procedimiento.
M- Se equivoca en uno de los pasos.
B- Se equivoca en más de un paso del procedimiento o no resuelve el ejercicio.
- 3) A- Escribe correctamente las dos ecuaciones en la forma indicada.
M- Comete un error de cálculo al escribir la ecuación a la forma indicada.
B- Comete más de un error de cálculo al transferir las ecuaciones a la forma indicada o no responde el ejercicio.

Anexo 7: Resultados de la prueba pedagógica por ítems y del indicador 1

Grupo: Control

Alumno	1a) (I_a)	1b) (I_b)	1c) (I_c)	2(I_2)	3 (I_3)	Índice
						$I = \frac{I_a + I_b + I_c + I_2 + I_3}{5}$
1	10	5	5	5	10	7
2	0	0	0	0	10	2
3	10	5	5	10	10	8
4	10	5	0	5	10	6
5	10	5	0	5	10	6
7	10	5	20	0	10	5
8	10	5	10	0	10	7
9	10	5	0	5	10	6
10	10	0	0	5	0	3
11	10	5	0	5	10	6
12	10	5	0	5	10	6
13	10	5	0	0	10	5
14	10	5	0	0	10	5
15	10	5	10	10	10	9
16	10	5	0	0	10	5
17	10	5	5	0	10	6
18	10	5	10	5	10	8
19	10	5	5	5	10	7
20	10	5	0	5	10	6
21	10	5	0	0	10	5
22	10	5	10	5	0	6
23	10	5	0	0	0	3
24	10	10	0	10	10	8
25	10	5	0	10	10	7
26	0	0	0	0	0	0
27	10	5	10	10	10	9
28	10	5	5	5	10	7

29	0	5	0	0	10	3
31	10	10	5	5	10	8

Grupo: Experimental

Alumno	1a) (I_a)	1b) (I_b)	1c) (I_c)	2(I_2)	3 (I_3)	Índice $I = \frac{I_a + I_b + I_c + I_2 + I_3}{5}$
1	10	5	10	0	0	5
2	10	0	0	0	10	4
3	10	5	10	10	10	9
4	10	5	10	5	10	8
6	10	5	10	10	10	9
7	10	5	10	0	10	7
8	10	5	10	0	5	6
9	10	0	10	0	10	6
10	10	5	10	0	0	5
11	10	5	10	0	10	7
12	10	5	10	0	10	7
13	10	5	10	5	10	8
14	10	5	10	10	10	9
15	10	5	0	0	0	3
16	10	10	10	0	10	8
18	10	0	10	10	10	8
19	10	5	10	5	10	8
20	10	5	10	5	10	8
21	0	0	10	10	0	4
23	10	10	10	10	10	10
25	10	5	0	0	10	5
26	10	5	10	0	5	6
27	10	5	10	10	10	9

28	10	5	10	10	10	9
29	10	5	10	10	10	9
30	10	5	10	0	10	7
33	10	0	10	0	0	4
34	10	5	10	10	10	9
35	10	5	10	0	10	7

Anexo 8: Resultados de la medición de los indicadores en el grupo experimental

Alumno	Indicador 1	Indicador 2	Indicador 3	Indicador 4
1	M	B	M	A
2	B	B	B	M
3	A	A	A	A
4	A	A	M	A
6	A	A	A	A
7	M	M	M	A
8	M	M	M	A
9	M	M	M	M
10	M	B	M	A
11	M	M	M	A
12	A	M	A	A
13	A	A	A	A
14	A	A	A	A
15	B	B	B	B
16	A	A	A	A
18	A	A	A	A
19	A	A	A	A
20	M	M	M	M
21	B	B	B	B
23	A	A	A	A
25	M	B	M	M
26	A	M	A	A
27	A	A	A	A
28	A	A	A	A
29	A	A	A	A
30	M	M	M	A
33	M	B	M	A
34	A	A	A	A

35	M	M	M	A
----	---	---	---	---

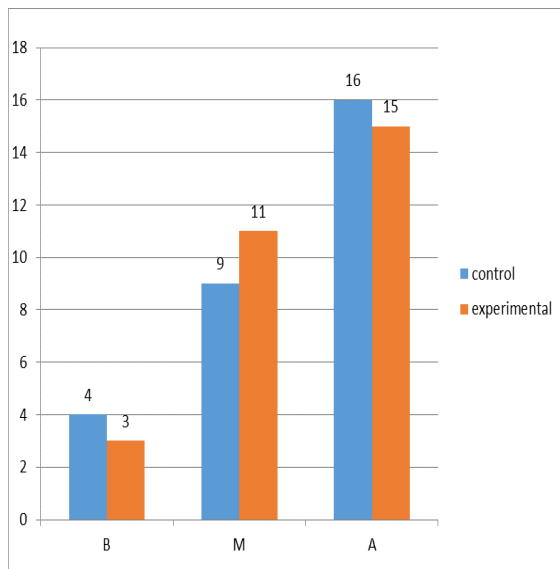
Anexo 9: Resultados de la medición de los indicadores en el grupo de control

Alumno	Indicador 1	Indicador 2	Indicador 3	Indicador 4
1	M	M	M	M
2	M	B	A	A
3	A	A	A	A
4	A	M	A	A
5	M	M	A	A
7	A	B	A	A
8	A	M	A	B
9	A	M	A	A
10	M	B	M	M
11	M	M	A	M
12	A	M	A	A
13	A	B	A	M
14	M	B	A	A
15	A	A	M	A
16	B	B	A	M
17	M	B	A	A
18	A	M	M	A
19	A	M	A	A
20	M	M	M	B
21	B	B	B	B
22	A	M	A	A
23	A	B	A	A
24	A	A	A	A
25	A	M	A	A
26	B	B	B	M
27	A	A	A	A
28	M	M	B	B
29	B	B	M	M
31	A	A	A	A

Anexo 10: Tabla con los resultados comparativos del indicador 1

Categorías	Grupo de control		Grupo experimental		Comparación %
	FA	FR%	FA	FR%	
B	4	13,8	3	10,3	-3,5
M	9	31,0	11	37,9	+ 6,9
A	16	55,2	15	51,7	-3,5
Total	29	100,0	29	100,0	

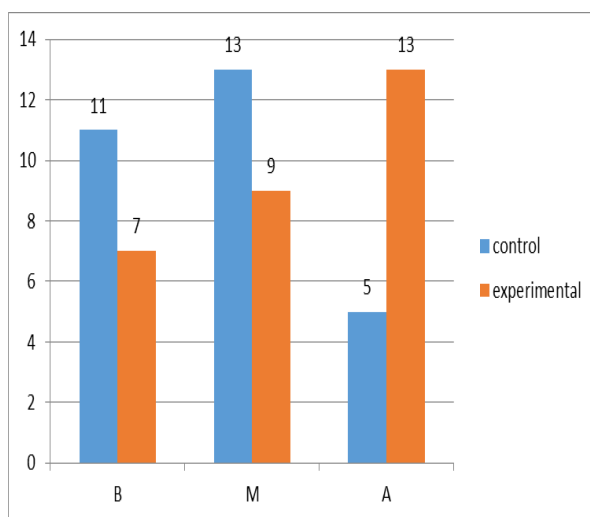
Gráfico con los resultados comparativos del indicador 1



Anexo 11: Tabla con los resultados comparativos del indicador 2

Categorías	Grupo de control		Grupo experimental		Comparación
	FA	FR%	FA	FR%	%
B	11	37,9	7	24,1	-13,8
M	13	44,8	9	31,0	-13,8
A	5	17,2	13	44,8	+27,6
Total	29	100,0	29	100,0	

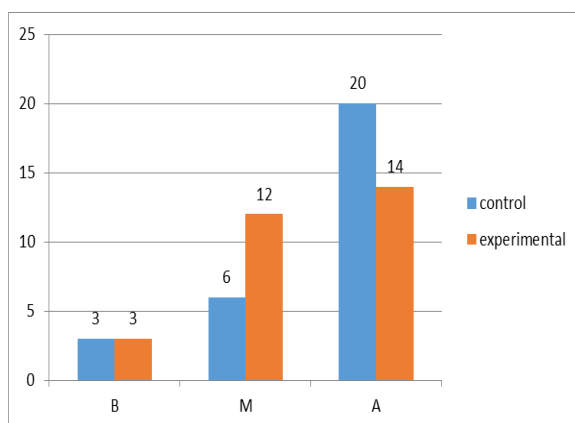
Gráfico con los resultados comparativos del indicador 2



Anexo 12: Tabla con los resultados comparativos del indicador 3

Categorías	Grupo de control		Grupo experimental		Comparación %
	FA	FR%	FA	FR%	
B	3	10,3	3	10,3	0
M	6	20,7	12	41,4	+20,7
A	20	69,0	14	48,3	-20,7
Total	29	100,0	29	100,0	

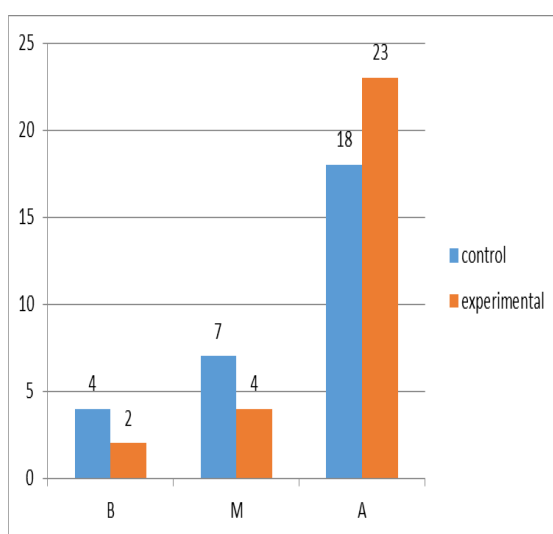
Gráfico con los resultados comparativos del indicador 3



Anexo 13: Tabla con los resultados comparativos del indicador 4

Categorías	Grupo de control		Grupo experimental		Comparación %
	FA	FR%	FA	FR%	
B	4	13,8	2	6,9	-6,9
M	7	24,1	4	13,8	-10,3
A	18	62,1	23	79,3	-17,2
Total	29	100,0	29	100,0	

Gráfico con los resultados comparativos del indicador 4



Anexo 14:

clase	Ejemplo	Ejercicio	Tarea
Clase # 134: Definición del concepto de función cuadrática como una correspondencia definida por la ecuación $F(x)=ax^2+bx+c$, ($a, b, c \in \mathbb{R}$). La función $y= ax^2$; $a \neq 0$. Representación gráfica y propiedades.	Ej. 1 a) y b)		Ej. 2 a) y b)
Clase # 137-139 Ejercicios de representación gráfica de funciones cuadráticas.		Ej. 2 a) y b) Ej. 3 a) y b)	Ej. 2 c) y d) Ej. 3 c) y d)
Clase # 140 Traslación de la parábola en la dirección de los ejes coordenados.		Ej. 4	
Clase # 141 Ejercicios de obtención de la ecuación de la función cuadrática trasladada en ambos ejes. Análisis de las propiedades.		Ej. 5 y 6	Ej. 7
Clase # 142 Ejercicios de obtención de la ecuación de la función cuadrática trasladada en ambos ejes. Análisis de las propiedades.		Ej. 8, 9 y 10	Ej. 11