UNIVERSIDAD DE CIENCIAS PEDAGÓGICAS CAPITÁN "SILVERIO BLANCO NÚÑEZ"

Departamento de Matemática – Física

Sancti Spíritus

LA FORMACIÓN Y DESARROLLO DE LA HABILIDAD PARA TRANSFERIR ENTRE REPRESENTACIONES ANALÍTICAS Y GRÁFICA DE FUNCIONES CUADRÁTICAS EN ESTUDIANTES DE DÉCIMO GRADO

Tesis en opción al título académico de Máster en Ciencias de la Educación

Mención en Educación Preuniversitaria

AUTOR: Lic. Enso Daimir Cañizares Miranda

Diciembre
2010

UNIVERSIDAD DE CIENCIAS PEDAGÓGICAS CAPITÁN "SILVERIO BLANCO NÚÑEZ"

Departamento de Matemática – Física

Sancti Spíritus

LA FORMACIÓN Y DESARROLLO DE LA HABILIDAD PARA TRANSFERIR ENTRE REPRESENTACIONES ANALÍTICAS Y GRÁFICA DE FUNCIONES CUADRÁTICAS EN ESTUDIANTES DE DÉCIMO GRADO

Tesis en opción al título académico de Máster en Ciencias de la Educación

Mención en Educación Preuniversitaria

AUTOR: Lic. Enso Daimir Cañizares Miranda

TUTOR: Dr C Aldo Medardo Ruiz Pérez

Diciembre 2010

PENSAMIENTO

Los encantos de esta ciencia sublime, las matemáticas, sólo se le revelan a aquellos que tienen el valor de profundizar en ella.

Carl Friedrich Gauss

DEDICATORIA

La realización de esta investigación fue posible gracias al apoyo moral y afectivo de quienes han creído en mí y me han acompañado siempre.

A mis padres, por haberme dado todo el afecto y cariño que necesita un hijo y por guiarme siempre por el camino más correcto.

A mis hermanos, especialmente a Edel, para que siga mi ejemplo y se trace metas que le permitan formarse como un buen profesional.

A mis grandes amigos Semir y Danilo, con quienes siempre pude intercambiar ideas y puntos de vista; y quienes me ayudaron, en muchos momentos, a tomar decisiones importantes.

A todos mi familiares, en especial a mi abuela y mi tío Eugenio; quienes estuvieron en todo momento pendiente de mis necesidades y dándome el aliento necesario para realizar esta investigación.

A mi otra y nueva familia por el cariño que me han dado y por el apoyo que he encontrado en ellos.

A todos mis amigos por tenerme siempre presente y compartir conmigo momentos felices.

AGRADECIMIENTOS

Muy especialmente a mi tutor y amigo Aldo Medardo Ruiz Pérez, por todo el tiempo que ha dedicado en enseñarme gran parte de todo lo que sé, por alentarme el deseo de superarme profesionalmente, por su siempre acertada guía, y por toda la confianza que ha tenido en mí.

A todos los profesores y miembros del comité académico de la Maestría que, de una u otra forma, han contribuido a mi formación como profesional.

A todos los colegas y amigos que me han ayudado.

SÍNTESIS

En la tesis se muestra una alternativa didáctica dirigida a contribuir a la formación y el desarrollo de la habilidad para transferir entre representaciones analíticas y gráfica de funciones cuadráticas en estudiantes de décimo grado. También se precisan los fundamentos teóricos que sustentan esta alternativa y los resultados que se obtuvieron cuando fue comprobada su efectividad a través de un pre-experimento pedagógico con medida post-test.

Este trabajo parte del insuficiente dominio que poseen los estudiantes sobre el estudio de las funciones como contenido de aprendizaje y principalmente en la poca habilidad que muestran a la hora de transferir entre sus representaciones; además, de los escasos ejercicios que se proponen en el libro de texto y en las video-clases, que trata estos contenidos, para formar y desarrollar la habilidad para transferir entre representaciones de funciones cuadráticas.

En los fundamentos teóricos de la alternativa se resalta, entre otros aspectos, una serie de procedimientos que se deben seguir para transferir entre representaciones analíticas y gráfica de funciones cuadráticas. Además, se puntualiza la importancia de desarrollar la habilidad para transferir entre las distintas representaciones de las funciones.

Por otra parte, se hace una descripción detallada sobre el proceso de enseñanza – aprendizaje de las funciones cuadráticas donde se señalan las ventajas que tiene una determinada representación analítica para inferir propiedades de estas funciones.

En la tesis se describe la Alternativa Didáctica, así como la forma en que fue implementada en el proceso de enseñanza – aprendizaje de la Matemática en décimo grado.

En la evaluación de la efectividad de la alternativa se comprobó que la misma permite formar y desarrollar, en los alumnos y alumnas, la habilidad para transferencia entre representaciones analíticas y gráfica de funciones cuadráticas.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Innumerables son las transformaciones que se han venido realizando en el Sistema Nacional de Educación. Están dirigidas a lograr con mayor eficacia la formación multilateral del hombre a partir de la inserción de este como sujeto activo en la sociedad, ya que según el enfoque histórico – cultural originado a partir de la escuela de L. S. Vigotski, colaboradores y seguidores, el cual fundamenta la pedagogía que guía la práctica del magisterio cubano, el individuo sólo se forma y desarrolla gracias a la actividad en su relación con otros.

Lograr formar ese hombre nuevo, significa un desarrollo social de excelencia lo que impone grandes desafíos en este complejo y cambiante mundo en que vivimos. En este sentido juega un papel protagónico la investigación educativa, la cual tiene un trascendente encargo social relacionado con la búsqueda de soluciones científicas que contribuyan a dar respuesta a los problemas que emergen de esos desafíos.

En el Sistema de Ciencia e Innovación Tecnológica del Ministerio de Educación se ha podido identificar a nivel nacional una serie de problemas científicos que se han considerado como los más apremiantes. Entre estos problemas se encuentra uno que se refiere a la calidad de los aprendizajes y al desarrollo de los adolescentes y jóvenes (García, Granados & Addine, 2005).

El problema científico mencionado anteriormente incluye en su extensión el proceso de enseñanza – aprendizaje (PEA) de la Matemática, esta es una de las razones por las cuales este proceso tiene transformaciones específicas, las que se evidencian en los objetivos generales de la Matemática en el nivel medio en Cuba (Ministerio de Educación de Cuba [MINED], 2004a).

Una dificultad que se ha presentado históricamente, dentro del PEA de la Matemática a nivel mundial, ha sido en los contenidos relacionados con las funciones. Esta se extiende desde el proceso de formación del concepto hasta el proceso de desarrollo del mismo, con énfasis en este último. Autores extranjeros refiriéndose al tema han planteado lo siguiente:

> *[…] podemos analizar cómo ha sido la instrucción sobre el concepto de función. Es un hecho que la enseñanza del concepto de función se restringe regularmente al paso de una expresión algebraica o tabla a una representación gráfica. Se ha señalado por varios autores […], que se descuida en la instrucción el paso de una representación gráfica a una expresión algebraica, siendo ésta una tarea difícil pero necesaria en este contexto teórico para la construcción del concepto de función. De hecho, en paquetes de software de matemáticas son muy pocos los que han desarrollado actividades en este sentido. Se ha dejado solo al estudiante para que establezca una conexión de las representaciones gráficas hacia las expresiones algebraicas (Hitt, 2001, p. 169).*

Según lo planteado anteriormente, la enseñanza y aprendizaje del concepto de función en muchos casos se restringe a la transferencia de una representación a otra, y principalmente se pasa de una representación analítica o tabular a la representación gráfica, haciendo poco hincapié en la transferencia de la representación gráfica a las representaciones analíticas de la función. También queda clara la posibilidad de utilizar el ordenador para desarrollar actividades encaminadas a resolver esa situación.

Esta problemática ha sido objeto de investigación de varios autores a nivel mundial. Una muestra de esto se evidencia en los trabajos de Rico, Castro y Romero (1997); Font (2001a); Font (2001b); Hitt (2001); Gómez y Rico (2002);

cuando plantean, entre otros aspectos, la necesidad de utilizar varios sistemas de representación para desarrollar los conceptos matemáticos.

Son varios los conceptos importantes que hacen referencia a esta problemática y que se necesita definir pues, aunque estos aparecen en varios documentos que norman el quehacer de los docentes en Cuba (MINED, 2004a), en ellos no se definen claramente. Tal es el caso del concepto de representación, de lo cual es importante precisar que en este contexto el autor se refiere a representaciones ostensivas de los objetos matemáticos, es decir, las representaciones externas, o sea, los términos, expresiones, símbolos, gráficos, diagramas, esquemas, etc.; y que según Lupiañez (2000, p. 40): *"las representaciones, en el ámbito de las matemáticas, son las notaciones simbólicas, gráficas o manifestaciones verbales mediante las que se expresan los conceptos y procedimientos así como sus características y propiedades más relevantes"*.

Otro concepto que se hace evidente definir es el de sistema de representación. Referente a este se puede decir que son varios los investigadores que han definido este concepto (Kaput, 1992; Font, 2001a; Font, 2001b) y todos concuerdan en que un sistema de representación es un sistema de signos sujetos por reglas específicas por medio de las cuales se representan los conceptos.

Es importante puntualizar también el concepto de transferir en este contexto entre representaciones de objetos matemáticos, el mismo se refiere al proceso de transitar de una representación a otra. Esto puede ser en el mismo sistema de representación o en otro diferente, pero siempre hay que tener en cuenta las reglas específicas de cada sistema de representación.

La transferencia entre dos representaciones funcionales requiere siempre de la aplicación de un procedimiento que depende, entre otros factores, del tipo a que pertenece cada representación y de los medios disponibles para realizarla. Por ello su enseñanza-aprendizaje se estructura teniendo en cuenta estos dos factores.

A partir del momento en que los alumnos se apropian de más de un procedimiento de transferencia, a la hora de resolver una tarea aparece como dificultad adicional la toma de la decisión sobre el procedimiento a aplicar. Surge entonces la necesidad de la construcción de un procedimiento general que incluya entre sus operaciones esta elección, teniendo en cuenta los tipos de las representaciones funcionales (dada y buscada) y los medios posibles a utilizar.

Por habilidad de alguien para ejecutar un procedimiento se asume la definición expuesta por Ruiz (2009, p. 3):

> *[…] la habilidad de una persona para ejecutar un procedimiento, es una formación psicológica predominantemente ejecutora, donde se integran lo afectivo y lo cognitivo en el dominio efectivo [expresado como el grado en que el resultado de la ejecución del procedimiento coincide con el objetivo], eficaz [concebido como la permanencia temporal de la habilidad correspondiente] y eficiente [referido al grado de aprovechamiento de los recursos y los medios por el ejecutor] de este procedimiento, expresado en una ejecución rápida y consciente para cumplir un objetivo en cada situación en que su aplicación sea pertinente.*

La formación en una persona de la habilidad para ejecutar un procedimiento se asume como el proceso mediante el cual, con la ayuda de otros, esta se apropia de los conocimientos necesarios para hacerlo y lo ejecuta independientemente con un mínimo de rapidez respecto a la posible, en tareas del mismo tipo que las resueltas con la ayuda de otros y en situaciones similares a las presentadas con anterioridad, de manera que se puede afirmar que una habilidad se ha formado cuando el ejecutor además de poseer los conocimientos necesarios, incluidos los referidos al procedimiento, tiene un dominio efectivo de este en tareas análogas a las resueltas con ayuda (Ruiz, 2009).

Otro concepto muy relacionado con la formación de una habilidad para ejecutar un procedimiento, es el desarrollo de esta, concebido como el proceso en el cual la persona va perfeccionando el dominio del procedimiento mediante el aumento de su grado de efectividad, eficacia y eficiencia, debido al efecto de su aplicación en nuevas situaciones y tareas en función de disminuir el número de errores en la ejecución y utilizar adecuadamente los medios disponibles, obteniendo el resultado con el mínimo de esfuerzo posible (Ruiz, 2009).

El concepto de habilidad para transferir entre representaciones analíticas y gráfica de funciones cuadráticas, se enfoca en este trabajo desde la perspectiva de la relación entre procedimiento y habilidad. En consecuencia, a la extensión de este concepto pertenecen tantas habilidades como tipos transferencias existen, incluida la habilidad para ejecutar el procedimiento general.

En lo que respecta a las tecnologías de la información y la comunicación, específicamente los medios de cómputo, se puede decir que estos muestran excelentes posibilidades en el PEA de la Matemática, pues permiten resolver problemas relacionados con la transferencia entre representaciones de las funciones. Sin embargo, el uso de estos medios debe ser de forma consciente y organizada al no estar exento de riesgos. Como ejemplo de ello se tiene la utilización del ordenador en un determinado momento donde no sea factible, lo que traería consigo serios problemas como lo es la desaparición de habilidades desarrolladas por los estudiantes.

En los programas de Matemática para la Educación Preuniversitaria actual (MINED, 2004a, p. 8), se precisan objetivos generales en los que se recomiendan el uso de las tecnologías de la información y la comunicación. Entre estos objetivos se encuentra el siguiente:

Desarrollar hábitos de estudio y técnicas para la adquisición independiente de nuevos conocimientos y la racionalización del trabajo mental con ayuda de los recursos de las tecnologías de la informática y la comunicación, que le permitan la superación permanente y la orientación en el entorno natural, productivo y social donde se desenvuelve.

Por otra parte, en el banco de problemas del Instituto Preuniversitario Vocacional de Ciencias Exactas (IPVCE) "Eusebio Olivera Rodríguez" se encuentra uno que se refiere al aprendizaje de la Matemática. Esto incluye los contenidos referidos a las funciones y la transferencia entre sus representaciones; lo cual fue constatado por el autor de esta tesis mediante algunas actividades que realizó con vista a evaluar el dominio, por parte de los estudiantes, de los contenidos relacionados con las funciones. Específicamente, en un diagnóstico del aprendizaje (anexo 1) aplicado por el docente en el que se pudo constatar la existencia del problema.

Además, de la preocupación por el aprendizaje, el autor realizó pesquisas relacionadas con la enseñanza de las funciones cuadráticas, utilizando para ello una entrevista a profesores del preuniversitario (anexo 2). En esta se obtuvieron los resultados siguientes:

- Se asume que en el estudio de las funciones como contenido de aprendizaje se centra la atención, principalmente, en la transferencia de la representación analítica a la gráfica, así como en determinar algunas de las propiedades del gráfico; descuidando el paso de la representación gráfica a la analítica.
- Se conoce de las posibilidades que brinda el ordenador como medio, para que los estudiantes comprendan las transformaciones que le ocurren al gráfico de las funciones cuando varía el valor de alguno de los parámetros de su representación analítica, también en las

orientaciones metodológicas del Programa (MINED, 2004a) se precisa que se utilice, pero no saben cómo hacerlo.

Según consta en la bibliografía revisada, la investigación sobre la transferencia entre representaciones analíticas y gráfica de funciones ha sido objeto de estudio por varios investigadores en el extranjero. Sobre el caso particular de las funciones cuadráticas, Font (2001a) expone los diversos sistemas que se pueden utilizar para representarlas; además organiza, a partir de un modelo, las distintas transferencias que se pueden realizar entre las representaciones de las funciones, pero no especifica las realizables entre representaciones del sistema analítico.

Por otra parte, este autor no señala la posibilidad de realizar transferencias cuyo procedimiento incluya la realización de dos o más transferencias directas ni generaliza los procedimientos que se deben seguir para realizar las transferencias directas.

En el ámbito cubano se han realizado algunas investigaciones que abordan el tema de las representaciones de las funciones, tal es el caso de Gómez (2005), quien trata este contenido a partir de la necesidad de desarrollar la habilidad para transferir y que los estudiantes puedan resolver problemas con texto que se modelan con funciones.

Este autor tampoco precisa las transferencias que se pueden realizar entre las representaciones analíticas de las funciones cuadráticas, aunque afirma la existencia de estas y las llama intratransferencias. Por otra parte, no expone los procedimientos generales que se pueden utilizar para transferir de una representación a otra.

Si se tiene en cuenta que las insuficiencias señaladas deben resolverse mediante la investigación pedagógica, queda planteado el siguiente:

Problema científico:

¿Cómo contribuir a la formación y desarrollo de la habilidad para transferir entre representaciones analíticas y gráfica de funciones cuadráticas en su proceso de enseñanza-aprendizaje con estudiantes de décimo grado del IPVCE "Eusebio Olivera Rodríguez" de Sancti Spíritus?

El problema antes planteado se da en el **objeto** proceso de enseñanza – aprendizaje de las funciones cuadráticas.

Específicamente se centrará la atención en el **campo de estudio**: la formación y desarrollo de la habilidad para la transferencia entre representaciones analíticas y gráfica de funciones cuadráticas.

Teniendo en cuenta lo referido hasta el momento sobre los problemas relacionados con las funciones y las potencialidades que brindan algunos paquetes informáticos, por su carácter interactivo y por la motivación que tienen los estudiantes hacia su uso, el autor de este trabajo consideró necesario elaborar una alternativa didáctica, dirigida a resolver esta problemática, y utilizando para ello las posibilidades que ofrecen las tecnologías de la información y la comunicación.

A partir de considerar trabajos publicados en Cuba acerca del concepto de resultado científico de una investigación educativa (Zilberstein, 2000; Sierra, 2002; Marimón, 2004; Valle, 2007; Lorences, sf; CCIP, sf), el autor de este trabajo asume que una alternativa didáctica es un resultado didáctico que resuelve un problema práctico del PEA y sustituye en la práctica a otro elaborado con anterioridad como producto de una investigación pedagógica, del trabajo científico-metodológico o de otras formas de construcción del conocimiento científico en el contexto educativo.

Por las razones expuestas hasta el momento, en la investigación se propone como **objetivo**:

Elaborar una alternativa didáctica dirigida a contribuir a la formación y desarrollo de la habilidad para transferir entre representaciones analíticas y gráfica de funciones cuadráticas, en estudiantes de décimo grado del IPVCE "Eusebio Olivera Rodríguez".

El proceso de resolución del problema de investigación por la vía analítica condujo al planteamiento de los siguientes subproblemas a modo de **preguntas científicas**:

1. ¿Qué fundamentos teóricos sustentan la formación y desarrollo de la habilidad para transferir entre representaciones analíticas y gráfica de funciones cuadráticas?
2. ¿Qué dificultades presentan los estudiantes de décimo grado del IPVCE "Eusebio Olivera Rodríguez" para transferir entre representaciones analíticas y gráfica de funciones cuadráticas?
3. ¿Qué alternativa didáctica contribuye a la formación y desarrollo de la habilidad para transferir entre representaciones analíticas y gráfica de funciones cuadráticas en los estudiantes de décimo grado del IPVCE "Eusebio Olivera Rodríguez"?
4. ¿Cuál es la efectividad de la alternativa didáctica concebida de esa manera para contribuir a la formación y desarrollo de la habilidad para transferir entre representaciones analíticas y gráfica de funciones cuadráticas en los estudiantes de décimo grado del IPVCE "Eusebio Olivera Rodríguez"?

Para el desarrollo de la investigación se ejecutaron las **tareas científicas** siguientes:

1. Determinación de los fundamentos teóricos que sustentan la formación y desarrollo de la habilidad para transferir entre representaciones analíticas y gráfica de funciones cuadráticas.
2. Precisión de las dificultades que presentan estudiantes de décimo grado del IPVCE "Eusebio Olivera Rodríguez" para transferir entre representaciones analíticas y gráfica de las funciones cuadráticas.
3. Estructuración de una alternativa didáctica que contribuya a la formación y desarrollo de la habilidad para transferir entre representaciones analíticas y gráfica de funciones cuadráticas en estudiantes de décimo grado del IPVCE "Eusebio Olivera Rodríguez".
4. Evaluación de la efectividad de la alternativa didáctica concebida, mediante su experimentación en la segunda unidad del Programa de Matemática de décimo grado.

Los **métodos** que se emplearon (Cerezal, Fiallo, Ramírez, Valledor & Ruiz, 2006, p.15) en el desarrollo de esta investigación son los siguientes:

Del nivel teórico.

- Analítico-sintético e inductivo-deductivo para el estudio de las fuentes de información, extraer de ellas regularidades y tendencias relacionadas con la transferencia entre representaciones de las funciones cuadráticas y para fundamentar el problema de investigación.
- Método del análisis histórico y lógico para analizar el comportamiento del problema de la investigación en las diferentes posiciones estudiadas y la evolución de las soluciones propuestas.

- Método del enfoque sistémico para estudiar el conocimiento relacionado con la transferencia entre representaciones analíticas y gráfica de funciones cuadráticas en los estudiantes de décimo grado del IPVCE “Eusebio Olivera Rodríguez”.

Del nivel empírico.

- La entrevista para constatar la existencia del problema de investigación en el objeto.
- La observación para apreciar el desempeño de los alumnos ante las tareas dirigidas a transferir entre representaciones analíticas y gráfica de funciones cuadráticas.
- El pre-experimento pedagógico solo con medida post-test para evaluar la efectividad de la alternativa didáctica.
- Análisis de los productos de la actividad para la determinación de comportamientos de los alumnos en la resolución de las tareas dirigidas a transferir entre representaciones analíticas y gráfica de funciones cuadráticas.

Del nivel estadístico.

- Métodos de muestreo para la selección de muestras de estudiantes y de tareas.
- Métodos de la Estadística Descriptiva para caracterizar el comportamiento de los estudiantes de la muestra seleccionada.

La contribución **teórica** de la investigación a la didáctica de la Matemática consiste en una sistematización de los procedimientos para la transferencia entre representaciones analíticas y gráfica de las funciones cuadráticas, lo cual complementa el modelo expuesto por Font (2001a) referido a las distintas transferencias que se pueden realizar entre las representaciones de estas funciones.

Desde el punto de vista **práctico** la investigación aporta varios tipos de tareas que permiten formar y desarrollar la habilidad para transferir entre representaciones analíticas y gráfica de funciones cuadráticas. Por otra parte, se muestra un ejemplo de cómo utilizar el ordenador y específicamente el asistente matemático Equation Grapher para que los estudiantes de décimo grado se apropien de un procedimiento que les permita inferir, a partir del estudio de las funciones cuadráticas como caso particular, las transformaciones que le ocurren al gráfico de las funciones cuando varía el valor de alguno de los parámetros de una de sus representaciones analíticas.

Además, aporta a los docentes una nueva alternativa de cómo contribuir al desarrollo de la transferencia entre representaciones analíticas y gráfica de funciones cuadráticas en su PEA.

El informe está estructurado por introducción, un cuerpo constituido por dos capítulos, las conclusiones, recomendaciones, la bibliografía y varios anexos. Cada uno de los capítulos está dividido en secciones y algunas de estas en epígrafes.

En el capítulo I se exponen los fundamentos teóricos de la Alternativa Didáctica elaborada y en el II se muestra la alternativa y se presentan los resultados obtenidos a partir de su implementación en la práctica escolar mediante un pre-experimento pedagógico.

CAPÍTULO I: LA FORMACIÓN Y DESARROLLO DE LA HABILIDAD PARA LA TRANSFERENCIA ENTRE REPRESENTACIONES ANALÍTICAS Y GRÁFICA EN EL PEA DE LAS FUNCIONES CUADRÁTICAS EN DÉCIMO GRADO

El presente capítulo está compuesto por tres secciones. La primera se refiere al proceso de enseñanza-aprendizaje de las funciones cuadráticas en décimo grado, en la segunda se expone una sistematización de los procedimientos para la transferencia entre representaciones analíticas y gráfica de funciones de este tipo (con lápiz y papel, mediante el uso del ordenador y general) y la tercera trata el tema de la formación y desarrollo de la habilidad para esta transferencia.

1.1. El proceso de enseñanza-aprendizaje de las funciones cuadráticas en décimo grado

Las funciones cuadráticas y su estudio como contenido de aprendizaje comienza en el primer año del preuniversitario, es decir, en décimo grado; específicamente este se inicia en la segunda unidad del programa de Matemática, la cual se llama: "Funciones lineales y cuadráticas. Inecuaciones y sistemas de ecuaciones".

En el programa de Matemática para el décimo grado actual (MINED, 2004a, p. 13) se señalan, como objetivos de la segunda unidad y con relación al estudio de las funciones, los siguientes:

- Describir mediante gráficos o ecuaciones funcionales el comportamiento de situaciones de la realidad que se modelan mediante funciones lineales o cuadráticas, aplicando sus propiedades.
- Interpretar informaciones sobre situaciones de la realidad que se modelan mediante funciones lineales y cuadráticas, dados sus gráficos, sus ecuaciones funcionales o sus propiedades.

- Aplicar los métodos de resolución de inecuaciones lineales, cuadráticas y fraccionarias a la determinación de propiedades de funciones y a problemas diversos.
- Interpretar geométricamente las soluciones de las inecuaciones lineales o cuadráticas en una variable, así como de los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables.

Con el fin de lograr los objetivos señalados anteriormente, en este programa, se precisan diferentes contenidos; entre los cuales se encuentra la caracterización del concepto de función como un conjunto de pares ordenados. Además, se puntualizan otros conceptos relacionados con el de función, como son: variable dependiente, variable independiente, imagen y preimagen. También se incluyen como contenido algunas propiedades de las funciones, tales como: el dominio, la imagen, los ceros, el signo, paridad y monotonía.

Para la apropiación de los contenidos del Programa antes señalados (MINED, 2004a, p. 18) se ofrecen las orientaciones metodológicas siguientes:

- Abordar las funciones lineales y cuadráticas con un enfoque que tenga en consideración la enorme importancia que ellas tienen en la modelación de numerosos procesos y fenómenos de la realidad objetiva.
- Hacer hincapié en la importancia que tiene la expresión de funciones a través de distintos tipos de representación, así como en la traducción entre las mismas.
- Hacer uso de un asistente matemático como el Equation para comprender las modificaciones de la ecuación y del gráfico de

una función por dilatación, contracción o la realización de algún movimiento.

Los estudiantes de décimo grado dan fe de que han vencido los objetivos del curso, cuando son capaces de resolver tareas de determinados tipos. Algunos de estos son: transferir entre representaciones analíticas y gráfica de las funciones cuadráticas y la determinación de algunas de las propiedades de las funciones.

Un problema presente en el libro de texto (Muñoz, 1991) y en las video-clases (MINED, 2004d; MINED, 2004e; MINED, 2004f; MINED, 2004g) que tratan los contenidos relacionados con las funciones cuadráticas para este nivel y específicamente con la transferencia entre representaciones analíticas y gráfica de estas funciones, es el insuficiente número de ejercicios que exigen transferir de la representación gráfica a una de las representaciones analíticas y entre las representaciones analíticas.

También se utiliza como dominio de las funciones cuadráticas el conjunto de los números reales o un subconjunto continuo de este, lo cual hace entender a los alumnos que solo pueden utilizar las funciones cuadráticas para modelar situaciones en las cuales el dominio de la variable sea de este tipo. Por otro lado, en el Programa (MINED, 2004a) se precisa la utilización de pocos tipos de representaciones analíticas de las funciones cuadráticas, por ejemplo, no se especifica el uso de la representación en la forma multiplicativa, atentando esto contra el desarrollo del concepto de función cuadrática.

Por otra parte, sobre el desarrollo psicológico, físico e intelectual que deben tener los estudiantes de este nivel educativo se señala (MINED, 2004a, p. 1) que al ingresar los alumnos y alumnas al Nivel Medio Superior transitan por una etapa significativa en sus vidas, es el período de tránsito de la adolescencia hacia la juventud. En este período, los estudiantes presentan características específicas en cuanto a su desarrollo físico, entre las cuales se encuentran:

- Diversidad de rasgos, es decir, en algunos estudiantes se presentan rasgos propios de la juventud mientras que en otros aún se manifiestan comportamientos típicos de los adolescentes. Esto sucede, generalmente, en los grupos de décimo grado.
- Mayor estabilidad de los motivos, intereses, puntos de vista propios, de manera tal que los alumnos se van haciendo más conscientes de su propia experiencia y de la de quienes los rodean.
- Formación de convicciones morales que el joven experimenta como algo personal y que entran a formar parte de su concepción moral del mundo.
- Las convicciones y puntos de vista, empiezan a determinar la conducta y actividad del joven en el medio social donde se desenvuelve, lo cual le permite ser menos dependiente de las circunstancias que lo rodean, ser capaz de enjuiciar críticamente las condiciones de vida que influyen sobre él y participar en la transformación activa de la sociedad en que vive.

En lo que respecta al desarrollo físico:

- El crecimiento longitudinal del cuerpo en la juventud es más lento que en la adolescencia; aunque comúnmente entre los 16 y 18 años ya los jóvenes han alcanzado una estatura muy próxima a la definitiva.
- El desarrollo sexual de los jóvenes es significativo; los varones, quienes respecto a sus compañeras habían quedado rezagados en este desarrollo, ahora lo completan.

En cuanto a las capacidades intelectuales:

- Se continúa y amplía el desarrollo que en la esfera intelectual ha tenido lugar en etapas anteriores.
- Los estudiantes del Nivel Medio Superior están potencialmente capacitados para realizar tareas que requieren una alta dosis de trabajo mental, de razonamiento, iniciativa, independencia cognoscitiva y creatividad. Estas posibilidades se manifiestan tanto respecto a la actividad de aprendizaje en el aula, como en las diversas situaciones que surgen en la vida cotidiana del joven.

- El desarrollo de las posibilidades intelectuales de los jóvenes aún depende del efecto de la educación y la enseñanza recibidas, tanto en la escuela como fuera de ella.
- Presentan reservas intelectuales desarrolladas, las cuales, conjugadas con la enseñanza organizada correctamente, permiten superar rápidamente las dificultades que algunos estudiantes de este nivel presentan ante tareas de carácter intelectual.
- Posibilidad de participar de forma mucho más activa y consciente en el PEA lo que incluye la realización más cabal de las funciones de autoaprendizaje y autoeducación.
- Se manifiestan tendencias, por parte de los estudiantes, a realizar apreciaciones sobre todas las cosas.

Teniendo en cuenta estas capacidades intelectuales que deben tener los estudiantes de este nivel, específicamente, las que se refieren a la posibilidad de realizar tareas que requieran una alta dosis de trabajo mental, de razonamiento, iniciativa, independencia cognoscitiva y creatividad, se puede asegurar entonces que estos estudiantes pueden ser capaces desarrollar la habilidad para transferir entre representaciones analíticas y gráfica de funciones cuadráticas.

Además, también se señala que estos alumnos y alumnas presentan reservas intelectuales desarrolladas que les permiten superar rápidamente dificultades que puedan presentar ante tareas de carácter intelectual, aspecto que es importante considerar en el momento de asegurar el nivel de partida para tratar contenidos nuevos que necesiten el conocimiento de contenidos precedentes.

En el documento citado anteriormente se señalan algunas recomendaciones que deben tener presente tanto los profesores de estos estudiantes como sus familiares. Entre estas se encuentran:

- Mantener un buen nivel de comunicación con ellos, escucharlos, atenderlos y no imponerles criterios o darles consejos generales sino ser capaces de intercambiar con ellos ideas y opiniones.
- Específicamente, en cuanto a los profesores, es necesario que siempre estén conscientes del contexto histórico en el que viven sus alumnos y que tengan presentes las características de ellos.

Sobre los alumnos y alumnas del IPVCE “Eusebio Olivera Rodríguez” se puede decir que ellos presentan estas características referidas a los aspectos psicológicos, físicos e intelectuales, además, de ser estudiantes de un significativo aprovechamiento académico y destacarse en la participación activa y consciente en el PEA, aspectos que les permiten jugar un papel protagónico en la construcción de sus conocimientos.

1.2. Transferencia entre representaciones analíticas y gráfica de funciones cuadráticas

En la introducción de este trabajo se puntualiza lo que se entiende por representación y en este sentido se precisa que las representaciones son notaciones simbólicas, gráficas o manifestaciones verbales mediante las que se expresan los conceptos y procedimientos, así como sus características y propiedades más relevantes.

Partiendo de puntos de vista actuales sobre el concepto de función (Godino, Wilhelmi y Bencomo, 2004; Mederos y González, 2005; citados por Quero y Ruiz, 2009: 4), en la presente tesis se asume que una función es una terna ordenada (A, B, F) formada por un conjunto A (el dominio de la función), un conjunto B (el codominio de la función) y un conjunto de pares ordenados F que cumple las propiedades siguientes:

1) Si $(x; y) \in F$, entonces $y \in B$ y $x \in A$.
2) Para cada $x \in A$ existe un $y \in B$ tal que $(x; y) \in F$.

3) El conjunto F no contiene dos pares diferentes con la misma primera componente, es decir, si $(x; y_1) \in F$ y $(x; y_2) \in F$, entonces $y_1 = y_2$.

Las funciones cuyo dominio y codominio son conjuntos numéricos se llaman funciones numéricas y por su representación gráfica se entiende la terna ordenada formada por las representaciones gráficas de su dominio, codominio y conjunto de pares ordenados. La primera y segunda componentes de esta terna son conjuntos de puntos de una recta, mientras que la tercera es un conjunto de puntos del plano. A la representación gráfica del conjunto de pares ordenados (x; y) tales que $y=f(x)$ $(x \in A)$ se le llama gráfico de la función numérica f.

Desde la perspectiva del concepto de función como terna, se asume que una función f de un conjunto A $(A \subseteq R)$ en un conjunto B $(B \subseteq R)$ se llama cuadrática, si tiene las propiedades:

1) A contiene al menos tres elementos diferentes.
2) Existen **a**, **b**, $\mathbf{c} \in \Re$ $(\mathbf{a} \neq 0)$ tales que, para todo $x \in A$, se cumple $f(x)=\mathbf{a}x^2+\mathbf{b}x+\mathbf{c}$.

Puesto que en la formación de un concepto los elementos de su extensión deben estar representados en algún sistema, la terna formada por: la ecuación $f(x)=\mathbf{a}x^2+\mathbf{b}x+\mathbf{c}$ el dominio A de la variable x y el codominio, es una representación de las funciones cuadráticas. A las representaciones que utilizan ecuaciones se les califica de analíticas.

Para representar una función cuadrática se utiliza una ecuación con el correspondiente dominio de la variable independiente[1] y codominio[2] (representación analítica), el gráfico junto con la representación del dominio y codominio, una tabla o la descripción verbal que expresa la dependencia entre las variables (dependiente e independiente) y sus respectivos dominios de variación.

---

[1] Cuando el dominio es el conjunto de los números reales, éste se omite.

[2] Cuando se representa analíticamente una función no se suele explicitar el codominio, pues conociendo el dominio y la ecuación se puede determinar el conjunto imagen. En esos casos se asume implícitamente que el codominio es el conjunto imagen y que por tanto la función es sobreyectiva.

En la figura 1 aparecen distintas formas de representar analíticamente una función cuadrática (Gómez, 2006), cuyo dominio es el conjunto de los números reales. Si el dominio es otro conjunto, basta agregar este a la ecuación.

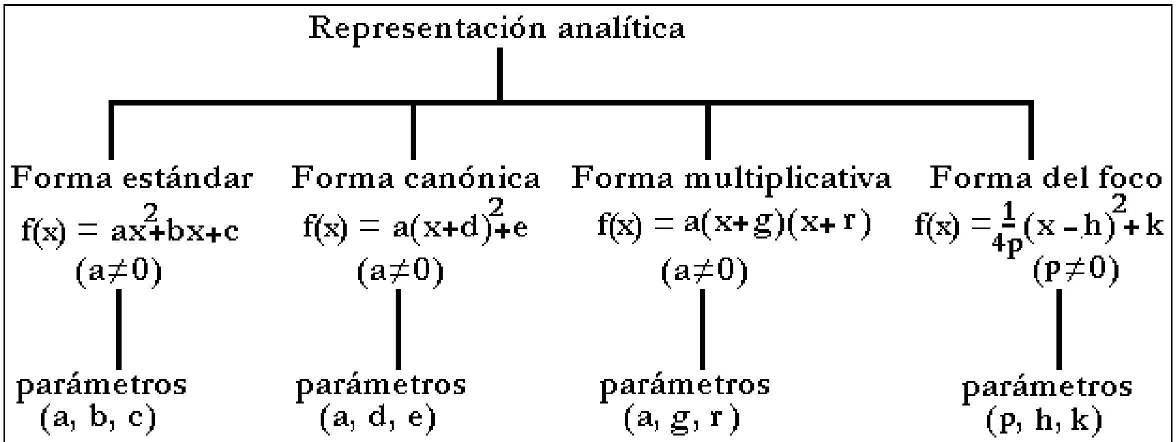


Fig. 1: Formas de representar analíticamente funciones cuadráticas.

Realizando un análisis sobre estas formas de representar analíticamente las funciones cuadráticas se puede llegar a la conclusión de que existen casos particulares en los que coinciden dos o más de estas representaciones (anexo 3).

En la didáctica, específicamente en la didáctica de la Matemática, son varias las investigaciones que han tenido (y tienen) por objetivo el estudio de representaciones internas (Font, 2001b) porque consideran que la comprensión de los alumnos está relacionada con el incremento del número de conexiones entre diferentes tipos de representaciones internas, lo cual se puede conseguir estableciendo conexiones y traducciones entre representaciones externas de diferentes tipos. Aunque el objetivo de las investigaciones sean las representaciones mentales de los alumnos, estas no se pueden considerar separadamente de las representaciones externas, ya que los dos tipos de representaciones influyen mutuamente en la cognición.

Es conocido que para desarrollar un concepto es necesario aumentar el número de representaciones de este, así como ampliar el número de sistemas donde este pueda ser representado. En este sentido Hitt (2001, p. 169) refiriéndose a Duval plantea: *"dado que cada representación es parcial con respecto a lo que representa, debemos considerar como absolutamente necesario la interacción entre diferentes representaciones para la formación del concepto".*

Por otra parte, Hitt (2001, p. 172) se refiere a la importancia de la transferencia entre las representaciones de los conceptos cuando afirma:

> *[…] el conocimiento de un individuo sobre un concepto es estable si él o ella es capaz de articular diferentes representaciones del concepto libre de contradicciones[…], la articulación de diferentes representaciones del concepto libre de contradicciones tiene que ver con la transferencia.*

Varios han sido los autores (Rico, Castro & Romero, 1997; Font, 2001a; Hitt, 2001; Goldin & Stheingold, citados por Font, 2005; Esteban, citado por Gómez, 2005) que han señalado la relación que existe entre los sistemas de representación de las funciones y las transferencias entre estos en cuanto a la comprensión del concepto por parte de los estudiantes. En este sentido han precisado que algunas dificultades de comprensión sobre estos conceptos han estado originadas debido a problemas de traducción entre los distintos sistemas de representación.

En el estudio de la Matemática es indispensable para lograr desarrollar un concepto utilizar varios tipos de representaciones. Sin embargo, se conoce que históricamente se ha usado con más preferencia, por parte de los profesores de Matemática, el sistema algebraico. Al respecto Hitt (2001, p. 171) plantea:

> *En la enseñanza de las matemáticas la gran mayoría de los profesores continúan privilegiando el sistema de representación algebraico sin considerar que las investigaciones en torno al aprendizaje apuntan al equilibrio que se le debe otorgar al uso de las diferentes representaciones en la construcción de conceptos.*

Teniendo en cuenta las citas anteriores se puede asegurar entonces que existe una estrecha relación entre la comprensión y el conocimiento estable, por parte de los estudiantes, del concepto de función cuadrática y el desarrollo de la habilidad para transferir entre representaciones analíticas y gráfica de estas funciones.

Un problema que puede presentársele a los profesores es el cómo organizar la transferencia entre las distintas representaciones de las funciones cuadráticas. En la tabla 1 aparece una forma, según Font (2001a, p. 182) que permite resolver esta problemática.

Tabla 1: Modelo para organizar la transferencia entre las distintas representaciones de funciones cuatráticas.				
Hacia / **Desde**	**Situación, Descripción verbal**	**Tabla**	**Gráfica**	**Expresión analítica**
Situación, Descripción verbal	1 Distintas descripciones	2 Estimación/ cálculo de la tabla	3 Boceto	4 Modelo
Tabla	5 Lectura de las relaciones numéricas	6 Modificación de la tabla	7 Trazado de la gráfica	8 Ajuste numérico
Gráfica	9 Interpretación de la gráfica	10 Lectura de la gráfica	11 Variaciones de escalas, unidades, origen, etc.	12 Ajuste gráfico
Expresión analítica	13 Interpretación de la fórmula (interpretación de parámetros)	14 Cálculo de la tabla dando valores	15 Representación gráfica	16 Transformaciones de la fórmula

Realizando un análisis del modelo presentando por Font en la tabla 1, se observa que presenta insuficiencias en lo planteado en las casillas 12, 15 y 16, pues en estas no se especifica todas las formas directas e indirectas de realizar las transferencias entre representaciones analíticas y gráfica de funciones ni los procedimientos para realizar dichas transferencias.

La importancia de transferir entre las distintas representaciones de un concepto para su desarrollo ha sido señalada por algunos autores, ejemplo de ello se aprecia en el trabajo de Gómez y Rico (2002, p. 25) cuando plantean:

> *El desarrollo del concepto en la dirección de las representaciones conduce a la necesidad de crear nuevas representaciones de los elementos de su extensión, transformar una representación en otra dentro de un mismo sistema y traducir una representación de un sistema a otro.*

1.2.1. Procedimientos para la transferencia entre representaciones analíticas y gráfica de funciones cuadráticas con lápiz y papel

La transferencia entre las representaciones estándar, canónica y gráfica de una función cuadrática, con lápiz y papel, es siempre posible. Esta es viable hacia la forma multiplicativa (en el conjunto de los números reales) cuando la función tiene al menos un cero real. En algunos casos el proceso es realizable directamente de la representación dada a la buscada y en otros, indirectamente, pasando primero por una o varias representaciones intermedias antes de obtener la buscada.

La transferencia entre las representaciones analíticas de una función cuadrática, expuestas en este trabajo, se reduce a transformar la ecuación dada de la función en otra equivalente, pues el dominio y codominio son los mismos en cualquiera de estas representaciones.

Para obtener una ecuación equivalente a una ecuación dada hay dos tipos de transformaciones. Las del primer tipo se realizan en ambos miembros de la ecuación (por ejemplo sumar y restar el mismo número) y las del segundo tipo se realizan en un solo miembro: son las llamadas transformaciones de términos. En la transferencia entre las representaciones analíticas (analizadas en esta tesis) de las funciones cuadráticas solo se utilizan las transformaciones equivalentes del segundo tipo; de manera que solo el miembro derecho de la ecuación funcional se transforma en una expresión igual a la inicial y por tanto la ecuación funcional dada se transforma en una ecuación equivalente en la representación buscada.

Según la regla del producto de la combinatoria (Campistrous, Rivero, Durán & Sandoval, 1991), el número de transferencias directas probables a realizarse entre las representaciones analíticas (estándar, canónica y multiplicativa) y gráfica de una función cuadrática es 12, mientras que el de indirectas es 48 (anexo 4).

No son posibles, con lápiz y papel, transferencias directas de la forma multiplicativa a la canónica y entre la multiplicativa y la forma del foco[3]. Además no son posibles las transferencias indirectas en las que alguna de estas intervenga (anexo 5).

Debido a que las principales dificultades que se presentan en la transferencia entre representaciones de funciones cuadráticas se centran en el conjunto de pares ordenados, en este epígrafe y los siguientes se dirigirá la atención hacia este aspecto y no hacia la transferencia entre representaciones del dominio y codominio.

Para transferir directamente de la representación expresada en la forma estándar a la forma canónica basta con seguir una de las dos vías siguientes:

1. vía (pertinente para $\mathbf{b} \neq 0$ y $\mathbf{b}^2 \neq \mathbf{4ac}$).

$\mathbf{a}x^2 + \mathbf{b}x + \mathbf{c}$

$= \mathbf{a}\,(x^2 + \frac{bx}{a}) + \mathbf{c}$ $\left(\frac{bx}{a} = 2\mathbf{d}x \Rightarrow \mathbf{d} = \frac{bx}{2xa} \Rightarrow \mathbf{d} = \frac{b}{2a} \right)$ /agrupando los primeros dos términos y extrayendo factor común[4] **a**.

Aplicando completamiento cuadrático obtenemos:

$= \mathbf{a}\,(x^2 + \frac{bx}{a}) + \mathbf{c}$

[3] La forma del foco no se estudia en décimo grado y por tanto no se incluye en los anexos.
[4] Si a=1 se omite este paso.

= **a** $\{[x^2+\frac{\mathrm{bx}}{\mathrm{a}}+(\frac{b}{2a})^2]-(\frac{b}{2a})^2\}$+ **c**

= **a** $[(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2}{4a^2}]$ + **c**

= **a** $(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2}{4a}$ + **c** /aplicando propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la sustracción a la izquierda.

= **a** $(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{-b^2+4ac}{4a}$

= **a** $(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{-1(b^2-4ac)}{4a}$

= **a** $(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$ /transformando los términos independientes[5] (véase que el numerador del segundo término es el discriminante).

2. vía (Pertinente si **b**≠0 y **b²≠4ac** y aplicable en el dominio de los números reales cuando **a**>0).

ax^2 + **b**x + **c** $\quad$ $\left(\mathbf{b}x = 2\mathbf{d}\sqrt{a}\,x \Rightarrow \mathbf{d} = \frac{bx}{2\sqrt{a}x} \Rightarrow \mathbf{d} = \frac{b}{2\sqrt{a}} * \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{b\sqrt{a}}{2a}\right)$

= $[\mathbf{a}x^2+\mathbf{b}x+(\frac{b\sqrt{a}}{2a})^2]-(\frac{b\sqrt{a}}{2a})^2$+ **c** /agrupando los dos primeros términos y aplicando completamiento cuadrático.

= $(\sqrt{a}\,x+\frac{b\sqrt{a}}{2a})^2-\frac{b^2a}{4a^2}$ + **c**

= $(\sqrt{a}\,x+\frac{b\sqrt{a}}{2a})^2-\frac{b^2}{4a}$ + **c**

[5] Si c=0 no hay que realizar cálculos numéricos en los que interviene c.

= [$\sqrt{a}$ (x+ $\frac{b}{2a}$)]^2+ $\frac{-b^2+4ac}{4a}$ / extrayendo factor común $\sqrt{a}$ en el primer término y sumando los dos restantes.

= **a** (x+ $\frac{b}{2a}$)^2+ $\frac{-1(b^2-4ac)}{4a}$

= **a** (x+ $\frac{b}{2a}$)^2- $\frac{b^2-4ac}{4a}$ / aplicando propiedades de la potencia en el primer término y transformando el segundo (véase que el numerador del segundo término es el discriminante).

Realizando un análisis sobre estos procedimientos se llega a la conclusión de que para transferir directamente de la representación analítica expresada en la forma estándar a la expresada en la forma canónica, basta con calcular los valores de los parámetros **d** y **e**, los cuales son iguales a $\frac{b}{2a}$ y $\frac{-(b^2-4ac)}{4a}$, respectivamente y especificar que el primer término de la forma canónica debe estar expresado como un producto donde uno de los factores es **a**, es decir, el coeficiente del término que contiene el cuadrado de la variable independiente en la forma estándar; y el otro factor es (x+ $\frac{b}{2a}$)^2.

Si se desea transferir directamente de la representación expresada en la forma canónica a la expresada en la forma estándar, basta con hacerle al miembro derecho de la primera representación, las transformaciones siguientes para d≠0:

Primero, desarrollar el producto notable que se presenta en el término (x+**d**)^2, y si **a**≠1 una vez desarrollado el producto notable se procede a aplicar el producto de este factor **a** por cada término del producto notable desarrollado, es decir, aplicar la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición a la derecha, por último, se reducen términos semejantes. A continuación se muestran las transformaciones que se deben realizar de forma general.

a$(x+\mathbf{d})^2$+**e**

= **a**$(x^2+2\mathbf{d}x+\mathbf{d}^2)$+**e** / desarrollando el producto notable $(x+\mathbf{d})^2$.

= **a**$x^2+2\mathbf{ad}x+\mathbf{ad}^2$+**e** / aplicando propiedad distributiva.

De lo anterior se arriba a la conclusión de que para transferir directamente de la representación expresada en la forma canónica a la expresada en la forma estándar, basta con determinar los valores de los parámetros **b** y **c** de esta última representación, los cuales son iguales a **2ad** y $\mathbf{ad}^2$+**e**, respectivamente.

Para transferir de la forma estándar a la forma multiplicativa es importante saber que esto es posible en el dominio de los números reales solo cuando el discriminante dado por la expresión $\mathbf{b}^2 - 4\mathbf{ac}$ es mayor o igual que cero (**a**, **b** y **c** son los parámetros de la representación analítica estándar).

En caso de que el valor del discriminante cumpla con una de estas condiciones, entonces para transferir de la representación estándar a la expresada en la forma multiplicativa, para el caso **a**≠1 basta con extraer factor común **a** y luego descomponer el otro factor utilizando la fórmula del discriminante o cualquier otro procedimiento de descomposición en factores del trinomio (binomio) cuadrático que sea pertinente.

Si **a**=1 se pasa directamente a la descomposición del trinomio (binomio) cuadrático sin realizar la extracción del factor común.

Las transformaciones a realizar utilizando el discriminante se muestran a continuación.

ax^2+**b**x+**c**

= **a**$(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a})$ / extrayendo el factor común **a**.

= **a**$\left(x + \frac{\frac{b}{a} - \sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2 - \frac{4c}{a}}}{2}\right)\left(x + \frac{\frac{b}{a} + \sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2 - \frac{4c}{a}}}{2}\right)$ / descomponiendo en factores utilizando la fórmula del discriminante.

Transformando los radicales aplicando propiedades de la potencia y restando las fracciones obtenemos:

ax^2+**b**x+**c** = **a**(x + $\dfrac{\frac{b}{a}-\sqrt{\frac{b^2-4ac}{a^2}}}{2}$)(x + $\dfrac{\frac{b}{a}+\sqrt{\frac{b^2-4ac}{a^2}}}{2}$).

Con estas transformaciones se pueden determinar los parámetros **g** y **r**, los cuales son iguales a $\dfrac{\frac{b}{a}-\sqrt{\frac{b^2-4ac}{a^2}}}{2}$ y $\dfrac{\frac{b}{a}+\sqrt{\frac{b^2-4ac}{a^2}}}{2}$, respectivamente. Cuando la expresión **b**^{2}–4**ac** es igual a cero, los parámetros **g** y **r** coinciden.

Otra vía que pudiera utilizarse para transferir de la representación estándar a la expresada en la forma multiplicativa y que logra los mismos resultados, consiste en la aplicación del teorema de Vieta.

Por otra parte, para el caso particular en que el coeficiente **a** del término cuadrático de la representación estándar sea positivo, entonces se pueden simplificar más las expresiones equivalentes a los parámetros **g** y **r**. Las transformaciones que se deben hacer en este caso son las siguientes:

Aplicando propiedades de los radicales y restando y sumando las fracciones en el numerador obtenemos:

a(x + $\dfrac{\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{a}}{2}$)(x + $\dfrac{\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{a}}{2}$)

Dividiendo las fracciones resulta:

a(x + $\dfrac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$)(x + $\dfrac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$)

De lo anterior se concluye que para transferir de la representación expresada en la forma estándar a la multiplicativa, cuando el coeficiente del término cuadrático de la representación estándar es positivo, basta con determinar los parámetros **g** y **r,** los cuales son iguales a $\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ y $\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, respectivamente.

Para realizar el proceso inverso, es decir, para transferir de la forma multiplicativa a la forma estándar basta con aplicar la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición con el factor **a** y cada uno de los factores que aparecen en esta representación y reducir términos semejantes. A continuación se muestran las transformaciones que se deben realizar (**a**≠1, **g**≠0 y **r**≠0) al miembro derecho de la ecuación funcional.

a(x+**g**)(x+**r**)
= (**a**x+**ag**)(x+**r**) / aplicando propiedad distributiva con el factor **a** y el binomio (x+**g**).
= **a**x^2+**ar**x+**ag**x+**agr** / aplicando propiedad distributiva.
= **a**x^2+**a**(**r**+**g**)x+**agr** / reduciendo términos semejantes.

Las transformaciones anteriores pueden hacerse también en otro orden, es decir, se puede aplicar primero el producto de los dos binomios que tienen un término común (producto notable estudiado por los estudiantes en noveno grado) y luego aplicar una propiedad distributiva con el factor **a** y el resultado obtenido por el producto notable.

De lo anterior se concluye que para transferir directamente de la forma multiplicativa a la estándar, basta con determinar los parámetros **b** y **c,** los cuales son iguales a **a**(**r**+**g**) y **agr**, respectivamente.

Para transferir de la representación analítica canónica a la expresada en la forma multiplicativa, es necesario que los valores de los parámetros **a** y **e** de la representación analítica canónica tengan diferentes signos[6]. En caso de que estos valores no cumplan esta condición, entonces no se puede realizar la transferencia.

El procedimiento de transferencia directa se basa en las transformaciones siguientes del miembro derecho de la ecuación funcional:

$$a(x+d)^2+e = a[(x+d)^2 - (-\frac{e}{a})] = a\,[(x+d+\sqrt{-\frac{e}{a}})(x+d-\sqrt{-\frac{e}{a}})].$$

Otro procedimiento para transferir de la forma canónica a la multiplicativa, cuando sea posible hacerlo, es representar la función en la forma estándar y luego pasar de esta a la multiplicativa, es decir, se puede seguir el orden que se muestra en la figura 2.

$$f(x) = ax^2+bx+c \quad (a\neq 0)$$

$$f(x) = a(x+d)^2+e \quad (a\neq 0) \qquad\qquad f(x) = a(x+g)(x+r) \quad (a\neq 0)$$

Fig. 2: Transferencia de la representación canónica de las funciones cuadráticas a la representación multiplicativa.

Por otra parte, para transferir de la representación expresada en la forma multiplicativa a la expresada en la forma canónica[7] se puede transferir primero a la forma estándar y luego de esta a la canónica, es decir, se puede seguir el orden que se muestra en la figura 3.

[6] Se está asumiendo que e≠0, pues de lo contrario ambas representaciones coinciden.
[7] Se asume que g≠r, pues en caso contrario ambas representaciones coinciden.

$$f(x) = ax^2+bx+c \quad (a\neq 0)$$

$$f(x) = a(x+g)(x+r) \quad (a\neq 0)$$

$$f(x) = a(x+d)^2+e \quad (a\neq 0)$$

Fig. 3: Transferencia de la representación multiplicativa de las funciones cuadráticas a la representación canónica.

El proceso que se debe seguir para transferir entre la representación expresada en la forma del foco y cualquiera de las restantes formas abordadas anteriormente no se precisa en este trabajo debido a que los estudiantes de décimo grado necesitan dominar primero algunos contenidos que se imparten en onceno grado.

Para transferir de las representaciones analíticas de una función cuadrática a su representación gráfica se necesita determinar al menos tres puntos del gráfico[8]. El proceso que históricamente se ha seguido cuando el dominio es un intervalo, con lápiz y papel, para realizar estas transferencias es a partir del ploteo de puntos o mediante el uso de plantillas para ciertos casos. Aunque se ha recomendado la utilización de recursos de las Tecnologías de la Información y la Comunicación con el fin de ayudar en este sentido, no se ha precisado cómo puede realizarse.

Teniendo en cuenta las palabras de Rico, Castro y Romero (1997, p. 5) cuando plantean: "[…] *Ningún sistema de representación matemático agota los conceptos que representa: por ello conviene distinguir entre los conceptos y sus significados o aspectos más o menos parciales que aportan las representaciones.*", el autor de esta tesis considera necesario que en el PEA de las funciones cuadráticas se utilice con mayor énfasis la representación analítica en la forma canónica, pero que se precise el parámetro indicador de la contracción o dilatación del gráfico

[8] Véase la definición de función cuadrática que se expone en el epígrafe 1.2.

respecto a su eje de simetría, en comparación con el gráfico de la función $f(x) = x^2$, $x \in \Re$.

La razón por la cual el autor recomienda un mayor uso de la representación analítica canónica en el PEA de las funciones cuadráticas es que de esta forma es más factible inferir algunas de las propiedades de estas funciones, así como las transformaciones que le ocurren a su gráfico cuando varía alguno de los parámetros.

Entre las propiedades de las funciones cuadráticas cuyo dominio es el conjunto de los números reales, que se pueden inferir de su representación analítica canónica se encuentran:

- El conjunto imagen de la función es el conjunto de los números reales mayores (menores) o iguales que el valor del parámetro **e**, si el valor del parámetro **a** es mayor (menor) que cero.
- El valor máximo o mínimo de la función, pues si el valor del parámetro **a** es mayor (menor) que cero, esta tiene un valor mínimo (máximo) y este es igual al valor del parámetro **e**.
- Los intervalos de monotonía de la función. Para esto se debe tener en cuenta que las funciones cuadráticas, cuyo dominio es el conjunto de los números reales, no son monótonas y que el análisis de su monotonía debe hacerse a partir de la división del dominio en dos intervalos. Si el valor del parámetro **a** es mayor (menor) que cero, la función es monótona decreciente (creciente) en el intervalo de los reales menores o iguales que el opuesto del valor del parámetro **d**, y en el resto del dominio la función es monótona creciente (decreciente).
- La paridad de la función, pues si el valor del parámetro **d** es igual a cero, la función es par, en caso contrario la función no es par ni impar.
- El sentido y la longitud de la traslación en dirección de los ejes de coordenadas, mediante la cual el gráfico de la función se obtiene del gráfico de $y=x^2$.

- La ecuación del eje de simetría es x = **-d**.
- El vértice es (-**d**; **e**).

En un estudio minucioso de estas propiedades se pueden determinar algunas relaciones que existen entre ellas, por ejemplo: el miembro derecho de la ecuación del eje de simetría coincide con la abscisa del vértice del gráfico de la función, además, este es el que se analiza para determinar la paridad de la función.

También se puede precisar, a partir de un análisis bastante sencillo, si la función tiene o no ceros, y en caso de que tenga, cuántos tiene. A continuación se expone de forma generalizada este análisis:

- Si el valor del parámetro **e** es diferente de cero y su signo es igual al del parámetro **a**, entonces la función no tiene ceros, por el contrario si el valor del parámetro **e** es diferente de cero y su signo es diferente al del valor del parámetro **a**, entonces la función tiene dos ceros.
- Cuando el valor del parámetro **e** es igual a cero, la función tiene un solo cero y este es x=**-d**.

Teniendo en cuenta todo lo expuesto en relación con las propiedades deducibles de la representación analítica canónica de las funciones cuadráticas de dominio $\Re$ y la necesidad de determinar al menos tres puntos de su gráfico para poder hacer un esbozo de este, se puede concretar que para transferir directamente de la representación analítica canónica a la representación gráfica se necesita determinar los puntos siguientes:

1) El vértice del gráfico de la función, representado por (-**d**; **e**).
2) Para el caso en que el valor del parámetro **d** sea diferente de cero, el punto (0; $\mathbf{ad^2+e}$) y su simétrico (-2**d**; $\mathbf{ad^2+e}$), respecto al eje de simetría del gráfico de la función, o el punto (**-d** -1; **a**+**e**) y su simétrico (**-d** +1; **a**+**e**), respecto al eje de simetría del gráfico de la función. En caso de que el valor del parámetro **d** sea igual a cero, dos puntos pueden ser (1; **a**+**e**) y su simétrico (-1; **a**+**e**), respecto al eje de simetría x = 0 del gráfico de la función.

Luego, se deben representar estos puntos y otros que se determinen, en un sistema de coordenadas rectangulares y trazar la curva que pase por ellos.

Un aspecto a tener siempre en cuenta es que mientras mayor sea el número de puntos determinados por donde pasa el gráfico, mejor trazado quedará este.

La razón por la cual el autor de esta tesis considera conveniente precisar estos puntos para trazar el gráfico de una función cuadrática, a partir de su representación canónica, es debido a la comodidad para obtenerlos; además, de la noción clara que se obtiene de la curva que se debe trazar para construir el gráfico.

Para transferir directamente de la representación gráfica de una función cuadrática de dominio $\Re$ a su representación analítica canónica se necesita determinar los valores de los parámetros **a**, **d** y **e**, para lo cual se debe hacer lo siguiente:

1) Determinar las coordenadas del vértice del gráfico de la función e identificar en él su abscisa y su ordenada, puesto que como se ha señalado, los valores de los parámetros **d** y **e** son iguales al opuesto de la abscisa y a la ordenada del vértice, respectivamente.
2) Calcular el valor del parámetro **a** partiendo de sustituir los valores de los parámetros **d** y **e** en la ecuación y = **a** (x+**d**)^2+**e**, así como las coordenadas de un punto P(x; y) que pertenezca al gráfico y que no sea precisamente el vértice.

Para transferir directamente de la representación analítica estándar de una función cuadrática de dominio $\Re$ a su representación gráfica se necesita determinar los puntos siguientes:

1) El vértice del gráfico de la función, el cual tiene por coordenadas $\frac{-b}{2a}$ y $\frac{-b^2+4ac}{4a}$.

2) Para el caso en que la abscisa del vértice sea diferente de cero, el punto (0; **c**) y su simétrico ($\frac{-b}{a}$; **c**), respecto al eje de simetría del gráfico de la función. En caso de que el término $\frac{-b}{2a}$ sea igual a cero, los dos restantes puntos pueden ser (1; **a**+**c**) y su simétrico (-1; **a**+**c**), respecto al eje de simetría x = 0 del gráfico de la función.

Luego, se deben representar estos puntos y otros que se determinen, en un sistema de coordenadas rectangulares y trazar la curva que pase por ellos.

Una variante más viable para hacer esta transferencia sería hacerlo primero hacia la representación analítica canónica y luego de esta transferir hacia la representación gráfica.

Para transferir directamente de la representación gráfica de una función cuadrática de dominio $\Re$ a su representación analítica estándar se necesita determinar los valores de los parámetros **a**, **b** y **c**, para lo cual se debe hacer lo siguiente:

1) Determinar las coordenadas del punto de intersección del gráfico con el eje de las ordenadas. La segunda componente de este punto es el valor del parámetro **c**.
2) Calcular los valores de los parámetros **a** y **b** partiendo de resolver un sistema de ecuaciones lineales, obtenidas mediante la sustitución de x y y por las coordenadas de dos de los puntos del gráfico, diferentes de su punto de intersección con el eje de las ordenadas.

En caso de que no pueda identificarse el punto de intersección del gráfico con el eje de las ordenadas, aspecto necesario para determinar el valor del parámetro **c**, se deben calcular los valores de los parámetros **a**, **b** y **c** a partir de determinar tres puntos por donde pase el gráfico de la función y resolver el sistema de ecuaciones formado al sustituir x y y por las coordenadas de los tres puntos determinados.

De la misma forma que para transferir de la representación analítica estándar a la representación gráfica, es más viable hacerlo primero hacia la representación analítica canónica, sucede cuando se desea transferir de la representación gráfica a la analítica estándar, es decir, es más viable hacerlo primero hacia la forma canónica y luego pasar de esta a la estándar.

Para transferir directamente de la representación analítica en la forma multiplicativa a la representación gráfica el autor recomienda determinar los siguientes puntos:

1) El vértice del gráfico de la función, el cual se representa por ($\frac{-g-r}{2}$; $\frac{-a(g-r)^2}{4}$).

2) Los puntos de intersección del gráfico con el eje de las abscisas, los cuales tienen la representación (0; -**g**) y (0; -**r**).

Luego, se deben representar estos puntos y otros que se determinen, en un sistema de coordenadas rectangulares y trazar el gráfico que pase por ellos.

Si se desea transferir directamente del gráfico de la función a la representación analítica en forma multiplicativa, se necesita determinar entonces los valores de los parámetros **a**, **g** y **r**, para lo cual se debe saber que este proceso es posible solo cuando el gráfico de la función tiene al menos un punto común con el eje de las abscisas.

En caso de que el gráfico tenga dos puntos comunes con el eje de las abscisas (**g** ≠**r**), se pueden precisar los valores de los parámetros **g** y **r** de forma sencilla, pues estos son los opuestos de las ordenadas de los puntos de intersección del gráfico con este eje. Para determinar el valor del parámetro **a** se debe resolver la ecuación que se obtiene al sustituir los valores de los parámetros **g** y **r**, así como las coordenadas de un punto que pertenezca al gráfico y que no sea precisamente ninguno de los puntos de intersección de este con el eje de las abscisas.

Por otra parte, si el gráfico tiene solo un punto común con el eje de las abscisas (**g**=**r**), la representación analítica tiene la forma y =**a**(x+**d**)^2 donde **d**=**g**=**r**. En este caso particular, el valor del parámetro **a** se calcula de la misma forma que en el caso cuando **g** y **r** son diferentes.

En párrafos anteriores se señaló que el dominio de las funciones cuadráticas más estudiadas en el preuniversitario actual, es el conjunto de los números reales o un subconjunto continuo de este (MINED, 2004a). En casos de dominio discreto, la transferencia de las representaciones analíticas a la gráfica debe transitar primero por una representación tabular en la cual se deben colocar todos o el mayor número posible de valores de las variables independiente y dependiente.

Por otro lado, si se desea transferir de la representación gráfica de una función cuadrática, cuyo dominio no sea el conjunto de los números reales, a una de sus representaciones analíticas, se debe formar un sistemas de tres ecuaciones utilizando tres puntos que pertenezcan al gráfico de la función y determinar los valores de los parámetros resolviendo el sistema de ecuaciones formado.

La transferencia de la representación gráfica de una función cuadrática a su representación analítica en su forma multiplicativa es posible si: 1) existe un punto del gráfico de la función con ordenada positiva y un punto con ordenada negativa o 2) existe un punto del gráfico con ordenada igual a cero.

Por otra parte, existen características del gráfico de las funciones cuadráticas que se pueden inferir a partir de cualquiera de las tres representaciones analíticas: estándar, canónica y multiplicativa. Entre estas se encuentran:

- El sentido para donde abre el gráfico de la función, pues si el valor del parámetro **a** es mayor (menor) que cero, el gráfico de la función abre hacia arriba (abajo).

- Si el gráfico está contraído o dilatado respecto a su eje de simetría, en comparación con el gráfico de la función $f(x) = x^2$, $x \in \Re$, pues si el módulo del valor del parámetro **a** es mayor que cero y menor que uno, el gráfico está contraído; por el contrario si este valor absoluto es mayor que uno, está dilatado.

La representación analítica estándar de una función cuadrática permite, a diferencia de la representación canónica, precisar el punto de intersección del gráfico con el eje de las ordenadas. En las funciones representadas por esta forma, el punto de intersección del gráfico con el eje de las ordenadas es (0; **c**), es decir, siempre es el punto cuya abscisa es cero y cuya ordenada es el valor del parámetro **c**.

La representación analítica en la forma multiplicativa de una función cuadrática, a la cual no se le presta atención explícita en el programa de Matemática para décimo grado (MINED, 2004a), permite identificar los ceros de la función a partir de un análisis muy sencillo de esta.

De modo general los ceros de la función expresada en la forma multiplicativa son x=-**g** y x=-**r**, es decir, los que hacen que los factores variables de la representación sean iguales a cero.

A modo de resumen, en los anexos 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16 y 17 se exponen los distintos procedimientos que se pueden utilizar para transferir directamente entre dos representaciones analíticas o entre una representación analítica y la gráfica de una función cuadrática, con lápiz y papel. También se exponen, en el caso de las transferencias analíticas, los procedimientos generales para cada una mediante diagramas de bloques.

1.2.2. Procedimientos para la transferencia entre representaciones analíticas y gráfica de funciones cuadráticas con el uso del ordenador

El desarrollo de la tecnología de la información ha traído consigo, en lo que respecta a su potencial, grandes perspectivas para el progreso de la educación.

Explotar al máximo estas potencialidades depende en gran medida de la utilización consciente y adecuada de los recursos tecnológicos en el PEA en general.

En Labañino (2006, p. 26) se señalan algunas de las ventajas que posee la computadora como medio de enseñanza. Entre estas se encuentra la siguiente:

La atención a las diferencias individuales entre los estudiantes, pues esta se puede lograr mediante la utilización de un buen software que se caracterice por:

- Ritmo de navegación, es decir, que permita que cada estudiante pueda “navegar” a su ritmo, pues unos necesitarán más tiempo que otros en procesar la información presentada o necesitarán un mayor reforzamiento expresado en repeticiones o adaptaciones del contenido.
- Permita que los estudiantes opten por estilos de aprendizaje diferentes, por ejemplo: aplicar procedimientos algorítmicos o procedimientos heurísticos.

Es un hecho que la implementación de esta tecnología no está exenta de riesgos, de ahí que se necesita por parte de los docentes, como máximos responsables de la instrucción y la educación de los alumnos y alumnas, una alta preparación y dominio de estos recursos.

Refiriéndose a los riesgos que se pueden presentar cuando se implementa esta tecnología, Labañino (2006, p. 27) plantea:

> *Las tecnologías no solo ofrecen bondades a los procesos formativos, también existen riesgos que se deben enfrentar. Algunos de estos son:*
>
> *Tecnofobia: temor al enfrentamiento a las tecnologías.*

> *Ilusionismo: es la idea de que la computadora resuelve todos los problemas educacionales.*
>
> *Problemas técnicos: refiriéndose al estado de idoneidad del hardware seleccionado, su correcto funcionamiento, su mantenimiento, la reparación en caso de rotura, etcétera.*

Para el caso específico del desarrollo de habilidades y la permanencia de estas, un uso inadecuado de las Tecnologías de la Información y la Comunicación puede traer consigo la pérdida de habilidades que se hayan alcanzado cuando los medios y recursos que se utilicen sean otros, por ejemplo: lápiz y papel.

Sin embargo, una de las principales razones por las cuales es posible revolucionar el aprendizaje de los educandos utilizando estos medios es, precisamente, la motivación que sienten, en general, los alumnos y alumnas por el uso de los sistemas computacionales.

En el ámbito de la Matemática son varias las investigaciones que se han hecho y se vienen haciendo sobre el uso de la computadora en el PEA (Castro & Pardo, 1998; Ursini, 2002; Negrón y otros, 2004; Herrera, 2008).

En este sentido, Negrón (2004, p. 1) ha señalado, refiriéndose al uso de la computadora en función de la visualización en la enseñanza – aprendizaje de la Matemática, lo siguiente:

> *[…] la computadora constituye un medio ideal para el desarrollo de la visualización como un recurso didáctico del docente, pues la acción cognitiva más importante que puede desarrollar un alumno con el ordenador, en relación con la visualización es la "exploración", […] esta permite abordar conceptos de alto nivel de complejidad de una manera informal en los primeros estadios*

de su formación, utilizando los recursos visuales disponibles; [además, permite] el acercamiento al concepto de diversas maneras eligiendo variadas formas de representación ya sean éstas verbales, simbólicas, icónicas, gráficas, numéricas, etcétera.

En los programas de Matemática del nivel medio en Cuba se orienta que se utilicen algunos programas de computación con el fin de lograr, por parte de los estudiantes, una mayor comprensión de los contenidos de esta asignatura. Específicamente, en los contenidos relacionados con las funciones y particularmente con las funciones cuadráticas se recomienda que se utilice el Simulador de Funciones del Software Educativo Eureka y el asistente matemático Equation Grapher (MINED, 2004a).

Sobre el asistente matemático Equation Grapher, el autor de esta tesis considera que este programa es más viable que el Simulador de Funciones del Software Educativo Eureka para utilizarlo en la transferencia de representaciones analíticas a la gráfica de funciones cuadráticas. Entre las ventajas que tiene el asistente matemático sobre el Simulador de Funciones, se encuentran las siguientes:

- Es un programa que para ejecutarlo no necesita de condiciones específicas, se puede ejecutar en varias versiones de Windows, entre las que se encuentran Windows 2000 y Windows XP.
- No forma parte de otro software como el Simulador que necesita de la ejecución del software Eureka para poder utilizarlo.
- En algunas de sus versiones no requiere de instalación para ejecutarse, es decir, se puede operar directamente con él. En las versiones que necesita ser instalado, este proceso es muy sencillo y rápido.
- Su almacenamiento y transportación es más viable ya que su tamaño en disco es inferior a 1,44 MB.

- Permite visualizar varias gráficas al mismo tiempo de forma rápida, es decir, permite representar en un mismo sistema de coordenadas rectangulares diferentes funciones sin necesidad de realizar muchas acciones para eso.
- Una vez creado los gráficos permite editarlos de forma interactiva, es decir, entre otras cosas permite guardar, imprimir, copiar, cortar, pegar y borrar gráficas que no interesen, todo como si fueran archivos normales independientes.

Tanto el Simulador de Funciones del Software Educativo Eureka como el asistente matemático Equation Grapher presentan un inconveniente en lo relacionado con el dominio de las funciones que estos pueden graficar. Ambos programas solo tienen utilidad para graficar funciones cuyo dominio es el conjunto de los números reales, un intervalo o la unión de intervalos.

Resulta necesario que el docente tenga en cuenta tal limitación cuando vaya a utilizar estos recursos como medios de enseñanza y aprendizaje, pues el estudiante puede pensar que siempre el dominio de las funciones cuadráticas es un intervalo o la unión de intervalos, cuando no es así.

Un recurso, a juicio del autor de la presente tesis, muy acertado para desarrollar la transferencia entre representaciones analíticas y gráfica de funciones cuadráticas es el ordenador.

Varios son los programas que el docente puede utilizar con este fin y que están o deben estar disponibles en cada uno de los laboratorios de computación de los preuniversitarios. Algunos de estos programas son los mencionados anteriormente, es decir, el Simulador de Funciones de Eureka y el asistente matemático Equation Grapher. Otro programa que se puede utilizar también para transferir entre representaciones analíticas y gráfica de funciones cuadráticas es el programa Microsoft Excel.

Para transferir entre representaciones analíticas y gráfica de funciones cuadráticas utilizando el programa Equation Grapher, se necesita conocer lo siguiente:

- El Programa permite representar gráficamente funciones cuadráticas, cuyo dominio sea un intervalo, a partir de escribir su representación analítica.
- En la sintaxis de la representación analítica de la función cuadrática que se escribe se debe tener en cuenta que la operación de elevar al cuadrado se expresa por el símbolo ^ seguido de un 2.

Por otra parte, como fue mencionado anteriormente, el programa Microsoft Excel también puede ser utilizado para representar gráficamente funciones cuadráticas, pero se debe conocer que:

- Antes de obtener el gráfico de la función a partir de su representación analítica, se necesita hacer una representación tabular de la misma con el mayor número posible de puntos correspondientes a elementos del dominio.
- El tipo de gráfico que permite representar la función es el “XY (dispersión)”

Un aspecto positivo que presenta el programa Microsoft Excel a diferencia de los dos anteriores, es que permite graficar funciones con dominio discreto, siendo el dominio el conjunto de los valores de la variable independiente que se ubiquen en la representación tabular. Además, permite transferir de la representación gráfica a una aproximación de la representación analítica estándar; aspecto que no se puede lograr con el Simulador de Funciones de Eureka o el asistente matemático Equation Grapher.

Otra ventaja de la utilización de Microsoft Excel, respecto a los demás programas, en el graficado de una función cuadrática, consiste en que el alumno debe representar la función en la sintaxis de este software, teniendo en cuenta la estructura y el orden de las operaciones matemáticas a realizar. Realmente esta forma de representación puede incluirse en el tipo analítico, diferenciándose del resto en la manera de escritura de la variable independiente y de los símbolos para la potencia, la multiplicación y la división.

Si se tiene en cuenta que para representar gráficamente varias funciones en un mismo sistema de coordenadas rectangulares con el Simulador de Funciones del Software Educativo Eureka, se necesita realizar varias acciones que requieren, entre otras cosas, el dominio de varios contenidos relacionados con la navegación por el software y utilizar más tiempo para realizar esta tarea, y además, que el programa Microsoft Excel necesita de una representación tabular previa para transferir de una representación analítica a la gráfica, resulta que para transferir de una representación analítica de una función cuadrática cuyo dominio es un intervalo o la unión de intervalos a la gráfica, es más eficiente utilizar el asistente matemático Equation Grapher.

Por otra parte, también es importante tener presente que el Simulador de Funciones de Eureka solamente permite transferir de la representación analítica canónica de una función cuadrática a la representación gráfica, mientras que el asistente matemático Equation Grapher posibilita pasar de las representaciones estándar, canónica y multiplicativa a la representación gráfica.

Los pasos que se deben seguir para transferir de una representación analítica de funciones cuadráticas a la representación gráfica, utilizando el asistente matemático Equation Grapher son los siguientes:

1- Una vez que se esté ejecutando el programa y en su ventana principal, se escribe la representación analítica en la caja de texto que aparece debajo de la barra de menús y la barra de herramienta estándar.
2- Luego se presiona la tecla Enter o se hace clic en el icono de la barra de herramientas que tiene como imagen un lápiz.

Si se desea que aparezca la representación analítica de la función que se escribió en la caja de texto, al lado de su gráfico, se debe activar la opción Show Function Names que aparece en el menú Options.

Por otra parte, este asistente permite representar varias funciones en un mismo sistema de coordenadas rectangulares. Si se quieren eliminar o borrar algunas de las representaciones gráficas construidas en el sistema de coordenadas rectangulares, se debe hacer clic en el icono de la barra de herramientas que tiene como imagen un lápiz con una goma en su extremo, luego, en la ventana “Select Function to Erase”, que aparece automáticamente, se debe seleccionar la representación analítica de la función que se quiera borrar y presionar la tecla Enter o hacer clic en el botón OK.

Para representar gráficamente una función cuadrática a partir de su representación analítica canónica utilizando el Simulador de Funciones del Software Eureka se deben seguir los pasos siguientes:

1- Una vez que se esté ejecutando el programa, acceder al Simulador de Funciones de este.
2- Ir al menú Archivo y hacer clic en la opción “Nuevo” o presionar las teclas Ctrl+N.
3- Ir al menú Función y hacer clic en la opción “Agregar función” o presionar la tecla F2.
4- En la ventana de diálogo “Elija la nueva función”, que aparece de forma automática, se escribe el título a asignarle a la función en la caja de texto correspondiente, además, se escoge el color con que se quiere representar la función en la caja de texto relativa al color y se verifica que la casilla “Función definida por defecto” esté activada y en la caja de texto referida a esta opción esté señalada la función cuadrática.
5- Por último se debe hacer clic en aceptar y especificar los valores de los parámetros de la representación analítica que se quiere graficar.

Para representar en un mismo sistema de coordenadas rectangulares varias funciones se deben realizar los pasos 3, 4 y 5. Por otro lado, si se quiere borrar uno de los gráficos se debe ir al menú Función y hacer clic en la opción “Seleccionar función” o presionar la tecla F5, luego seleccionar la función que se desee borrar y por último ir nuevamente al menú Función y hacer clic en la opción “Eliminar función” o presionar la tecla F4.

Por otra parte, para transferir de la representación analítica de una función cuadrática a su representación gráfica utilizando el programa Microsoft Excel, se debe hacer primero una representación tabular de esta función.

Cuando se vaya a representar tubularmente la función se debe tener en cuenta que si se escriben los valores de la variable independiente en una misma fila, es decir, en forma horizontal, sus respectivas imágenes deben colocarse debajo de esta fila y en forma horizontal también, de tal manera que cada una debe estar en la misma columna de su respectiva preimagen. Para el caso en que los valores de la preimagen se escriban en una misma columna (en forma vertical), sus respectivas imágenes deben colocarse al lado de esta columna y en forma vertical también, garantizando que cada una deba estar en la misma fila de su respectiva preimagen.

Una vez representada tubularmente la función, los pasos que se pueden seguir para lograr transferir hacia la representación gráfica, utilizando Excel 2003, son los siguientes:

1- Seleccionar los rangos correspondientes a los valores de las preimágenes y de las imágenes.
2- Hacer clic en el menú Insertar de la barra de menús y luego hacer clic en la opción “Gráfico”, o hacer clic en el icono que tiene como imagen un gráfico de barras y que se encuentra en la barra de herramientas estándar.
3- Luego, en la ventana que aparece y que se llama “Asistente para gráficos – paso 1 de 4: tipo de gráfico”, seleccionar el tipo de gráfico XY (Dispersión), elegir el subtipo de gráfico que se desee, hacer clic en el botón Siguiente y escribir los datos solicitados por el asistente.

Para transferir de la representación gráfica de la función, de forma aproximada, a su representación analítica estándar se deben seguir los pasos siguientes:

1- Seleccionar el gráfico.

2- Hacer clic en el menú Gráfico de la barra de menús y luego clic en la opción "Agregar línea de tendencia…".

3- En la ventana "Agregar línea de tendencia", específicamente en la ficha Tipo, seleccionar como tipo de tendencia o regresión, la polinomial y escribir 2 en el dato del orden.

4- En la ficha Opciones de la ventana mencionada en el paso tres, hacer clic en la casilla de verificación "Presentar ecuación en el gráfico" y hacer clic en Aceptar.

A modo de resumen, en los anexos 18 y 19 se exponen los distintos procedimientos que se pueden utilizar para transferir entre representaciones analíticas y gráfica de una función cuadrática, utilizando el ordenador.

1.2.3. Procedimiento general para la transferencia entre representaciones analíticas y gráfica de funciones cuadráticas

Para resolver una tarea cuya exigencia sea la transferencia entre dos representaciones analíticas o entre una representación analítica y la representación gráfica de una función cuadrática, el autor de esta tesis, propone el procedimiento siguiente basado en la contextualización del modelo de resolución de problemas de Polya y las contribuciones de la tesis de Vázquez (2008) referidas a la cuarta etapa de este modelo:

1) Identificación del sistema de la representación dada y del sistema de la representación buscada.

En esta etapa del procedimiento se precisa en qué sistema se encuentra representada la función y en qué sistema deberá representarse, una vez ejecutado el procedimiento para convertir de una forma a otra.

2) Determinación del procedimiento y los medios a utilizar para transformar la representación dada en la representación buscada.

En esta segunda etapa se determina el procedimiento que se debe seguir para transferir de la representación dada a la buscada, teniendo en cuenta las exigencias específicas de la tarea. Además se determinan los medios que se pueden utilizar para realizar dicha tarea.

3) Ejecución del procedimiento elegido.

En esta etapa es donde se ejecuta el procedimiento elegido para transferir de la representación dada a la buscada.

4) Análisis retrospectivo y perspectivo.

- Verificar si la representación buscada corresponde a la función.
- Valoración de la vía: analizar si existe otra vía de obtener la representación, determinar semejanzas y diferencias con la vía utilizada, así como ventajas y desventajas.
- Plantear nuevas tareas.

En esta última etapa es donde se valora la efectividad del procedimiento ejecutado para transferir de la representación dada a la buscada. Además se analiza la existencia de otra vía y en caso positivo se determinan semejanzas y diferencias con la utilizada, así como las ventajas y desventajas de emplear esta nueva vía. Por otra parte, se plantean nuevas tareas.

1.3. Formación y desarrollo de la habilidad para transferir entre representaciones analíticas y gráfica en el proceso de enseñanza – aprendizaje de funciones cuadráticas en décimo grado

En la introducción de esta tesis se precisa lo que se entiende por habilidad para ejecutar un procedimiento. A continuación se especifica cuando un sujeto tiene formada la habilidad para transferir entre representaciones de funciones.

En este contexto se asume que una persona tiene formada la habilidad para transferir entre representaciones de funciones cuando: 1) conoce el procedimiento que debe ejecutar para lograr la transferencia, 2) logra obtener mediante la ejecución del procedimiento la representación buscada en tareas similares a las resueltas, con cierto grado de aproximación y un mínimo de rapidez respecto a la posible y consciente de su actuación, y 3) se comunica en este proceso asumiendo una actitud crítica ante sus dificultades y las dificultades de los demás.

El desarrollo de la habilidad para transferir entre representaciones de funciones cuadráticas, teniendo en cuenta los aspectos referidos por Ruiz (2009), ocurre cuando, una vez formada la habilidad, el sujeto va perfeccionando el dominio del procedimiento de transferencia al alcanzar un grado significativamente superior de coincidencia entre el resultado de la ejecución del procedimiento y la representación buscada (efectividad), además, aplica el procedimiento con efectividad en tareas que se diferencian de las resueltas con anterioridad (eficacia) y explota los recursos y medios disponibles, según las condiciones y exigencias de la tarea de aprendizaje, para obtener el resultado correcto en el menor tiempo posible (eficiencia).

Una condición necesaria para lograr formar y desarrollar una habilidad para ejecutar un procedimiento es precisamente el conocimiento de este. Si tenemos en cuenta las palabras de Ruiz (2009, p. 2) cuando plantea que: *"[…] el dominio de un procedimiento no siempre se manifiesta en forma de habilidad y en muchos casos, debido al nivel de complejidad del procedimiento [o a su carácter singular], resulta poco probable la ocurrencia de tal suceso"*, entonces resulta evidente la necesidad de explotar todos los procedimientos posibles para realizar una determinada tarea de tal forma que permita constatar la existencia o no de al menos uno de ellos en el que se pueda lograr formar y desarrollar la habilidad para ejecutarlo.

Por otra parte, si tenemos en cuenta que a la solución de muchas tareas se llega utilizando procedimientos diferentes, cuyo dominio puede manifestarse en forma de habilidad, el cual se mide en dependencia de la efectividad, eficacia y eficiencia con que se pueda ejecutar el procedimiento, entonces resulta evidente la necesidad de hacer un análisis de estos procedimientos que permita identificar con cuál de ellos se logra optimizar el proceso de resolución de la tarea.

Por ejemplo, para el caso particular del desarrollo de la habilidad para transferir de representaciones analíticas al gráfico de funciones cuadráticas de dominio el conjunto de los números reales, con lápiz y papel, el aspecto referido a la efectividad del dominio del procedimiento se logra cuando, la vía que se utiliza permite obtener un gráfico lo más representativo posible de la función.

En el epígrafe1.2.1: “Procedimientos para la transferencia entre representaciones analíticas y gráfica de funciones cuadráticas con lápiz y papel”, se especifica que para transferir de la representación analítica de una función cuadrática a su representación gráfica es necesario determinar al menos tres puntos por donde pasa el gráfico de la función y luego trazar la curva que pase por estos. En ese mismo epígrafe se puntualiza cuáles son los puntos, que debido a la comodidad que se presenta para calcularlos y de la representatividad que se logra para trazar la curva de la función, deben ser los que se determinen para transferir entre representaciones analíticas y gráfica de funciones cuadráticas.

Un ejemplo donde puede verse afectada la efectividad del dominio de un procedimiento, es en una tarea cuya exigencia consista en transferir de la representación analítica estándar de una función cuadrática de dominio el conjunto de los números reales a su representación gráfica, y en el procedimiento se utilice el ploteo de puntos, evaluando la función para ciertos valores que solo permitan trazar parte de una de las ramas que forman el gráfico de la función.

La formación y desarrollo de la habilidad para transferir entre representaciones analíticas y gráfica de funciones cuadráticas en décimo grado, como expresión del dominio del procedimiento general expuesto en el presente capítulo, se concibe en este trabajo con un enfoque inductivo comenzando por las transferencias directas con lápiz y papel, después las indirectas con estos medios, y finalmente la ejercitación del procedimiento general.

Entre los medios y recursos que se pueden utilizar para formar y desarrollar habilidades relacionadas con la transferencia entre representaciones analíticas y gráfica de funciones cuadráticas en el PEA de las funciones se encuentran el lápiz y papel, y los recursos de la tecnología de la información y la comunicación, específicamente, el ordenador.

Estos últimos permiten realizar determinadas tareas con una eficiencia mayor, es decir, en un menor tiempo; una mejor efectividad dada por la correspondencia entre el resultado alcanzado y el objetivo trazado y una eficacia superior dada, entre otros aspectos, por la gran aplicabilidad que tienen estos medios para resolver distintas tareas de transferencia.

Estos aspectos positivos que se le atribuyen a los medios de cómputo puede traer consigo, por parte del alumno, una inclinación para utilizarlos con más frecuencia e ir suprimiendo con esto el uso de lápiz y papel para realizar tareas de transferencia entre representaciones analíticas y gráfica de funciones cuadráticas, lo cual provocaría la pérdida de esta habilidad con estos últimos recursos.

Conclusiones del capítulo.

Los métodos de investigación empleados en el estudio de las fuentes de información han permitido lo siguiente:

En lo referido al PEA de las funciones cuadráticas, y específicamente en lo relacionado con la transferencia entre sus representaciones, se puede arribar a las conclusiones:

- ✓ En los documentos rectores del PEA de la Matemática se les orienta a los docentes que utilicen distintos tipos de representaciones de las funciones, así como que se hagan transferencias entre estas.
- ✓ En los libros de textos y en las video-clases que tratan los contenidos relacionados con las funciones no se especifica ningún procedimiento que generalice las transferencias que se deben hacer entre las

representaciones analíticas y gráfica de las funciones cuadráticas que se estudian.

- ✓ A los docentes se les orienta que deben hacer uso de un asistente matemático como el Equation Grapher o el Simulador de Funciones del Software Educativo Eureka para que los estudiantes comprendan las transformaciones que les ocurren al gráfico de las funciones cuadráticas cuando varía alguno de los valores de los parámetros de su representación analítica, pero no se le especifica cómo pueden hacerlo.
- ✓ En la práctica del PEA no se presentan suficientes ejercicios que exijan pasar de la representación gráfica de funciones cuadráticas a las representaciones analíticas de estas.
- ✓ Los estudiantes del IPVCE "Eusebio Olivera Rodríguez" presentan características intelectuales que les permiten desarrollar la habilidad para transferir entre representaciones analíticas y gráfica de funciones cuadráticas.

Relacionado con la transferencia entre representaciones analíticas y gráfica de funciones cuadráticas, se puede concluir que:

- ✓ Son varias las formas en que se puede representar analíticamente una función cuadrática, pero en los documentos que norman el trabajo de los docentes solo se refiere al uso de dos de estas representaciones.
- ✓ El procedimiento que se utiliza para transferir de las representaciones analíticas que se estudian a la representación gráfica es mediante el ploteo de puntos. Sin embargo, puede hacerse a partir de determinar cómodamente ciertos puntos que permiten tener una noción clara de la curva que se debe trazar para hacer el gráfico.
- ✓ Es posible ejecutar procedimientos generales para transferir entre representaciones analíticas de funciones cuadráticas, pero en los libros de texto y en las video-clases que tratan los contenidos referidos a estas funciones no se especifica ninguno.

- ✓ Varios han sido los investigadores que han centrado sus estudios en las representaciones de los conceptos matemáticos y han planteado la necesidad de aumentar el número de sistemas donde estos puedan ser representados.
- ✓ Cada representación de un concepto matemático es parcial respecto a lo que representa, de ahí la importancia de aumentar su número, así como ampliar los sistemas donde ello pueda realizarse para desarrollar el mismo.
- ✓ El uso del ordenador como medio, específicamente los programas Microsoft Excel, Equation Grapher y el Simulador de Funciones del Software Eureka pueden utilizarse para transferir entre representaciones analíticas y gráfica de funciones cuadráticas.

En cuanto al desarrollo de la habilidad para transferir entre representaciones analíticas y gráfica de funciones cuadráticas se puede precisar lo siguiente:

- ✓ El desarrollo de la habilidad de una persona para ejecutar un procedimiento se mide en la efectividad, eficacia y eficiencia con que pueda hacerlo.
- ✓ La habilidad de un estudiante para transferir entre representaciones de funciones cuadráticas depende del conocimiento, y del nivel de dominio que tenga del procedimiento correspondiente.

CAPÍTULO II: ALTERNATIVA DIDÁCTICA DIRIGIDA A LA FORMACIÓN Y DESARROLLO DE LA HABILIDAD PARA LA TRANSFERENCIA ENTRE REPRESENTACIONES ANALÍTICAS Y GRÁFICA DE FUNCIONES CUADRÁTICAS

En el presente capítulo se describe la Alternativa Didáctica elaborada teniendo en cuenta los fundamentos teóricos precisados en el capítulo I, también se puntualiza la muestra que fue seleccionada para realizar el pre-experimento, se definen las variables dependiente e independiente y se operacionaliza la dependiente.

Por otra parte, se señala cómo se mide la variable dependiente y se precisa cómo se implementó experimentalmente en la práctica pedagógica la Alternativa Didáctica concebida y cuáles son los resultados que se obtuvieron al hacerlo.

*2.1.*Presentación de la Alternativa Didáctica

A partir de la definición de alternativa didáctica expuesta en la introducción, se presenta, en tres epígrafes, la Alternativa Didáctica concebida. En el primero se caracteriza el resultado didáctico al que esta sustituye, en el segundo se describe la alternativa según sus componentes y estructura, y en el tercero se expone su relación con el resultado en términos de características comunes y diferencias.

2.1.1. Caracterización del resultado didáctico al que sustituye la Alternativa Didáctica

El PEA de las funciones cuadráticas comienza en el décimo grado del preuniversitario. Para el estudio de estas funciones se dedican nueve horas clases, incluyendo en estas las destinadas a la ejercitación.

En el programa de Matemática para este nivel (MINED, 2004a) se puntualiza que la vía fundamental mediante la cual se deben impartir los contenidos es la video-clase, aunque también se señala que debe utilizarse el libro de texto, materiales que puedan servir de consulta, el software educativo y los asistentes matemáticos, entre otros medios.

En MINED (2004h) y MINED (2004k) se exponen algunas recomendaciones de cómo debe utilizarse la video-clase como medio de enseñanza – aprendizaje. Específicamente se plantea la existencia de tres momentos en la clase; el primero se refiere a las acciones que deben realizarse antes de proyectarse el video, aquí están incluidas funciones didácticas como el aseguramiento del nivel de partida; el segundo se corresponde con las acciones que deben realizarse durante la proyección del video; y el tercero a las acciones que se deben ejecutar una vez proyectado.

Con respecto a las representaciones analíticas de las funciones cuadráticas que se estudian, en este grado, es importante señalar que en el programa de Matemática para este nivel (MINED, 2004a) se hace referencia al uso de solo dos formas de representarlas, siendo posible hacerlo de otras maneras diferentes.

Las representaciones expresadas mediante las formas estándar y canónica son las únicas mencionadas en el programa de Matemática para el primer año del preuniversitario (MINED, 2004a). Es necesario puntualizar que en este programa, en la representación expresada en la forma canónica no se precisa el significado del parámetro **a**, cuyo módulo evidencia la contracción o dilatación del gráfico con respecto a su eje de simetría, en comparación con el gráfico de la función $f(x) = x^2$, $x \in \Re$; aunque en las video-clases (MINED, 2004f) sí se proponen ejercicios donde aparece este parámetro.

En el libro de texto (Muñoz y otros, 1991) y en las video-clases (MINED, 2004d; MINED, 2004e; MINED, 2004f; MINED, 2004g) que tratan los contenidos de las funciones cuadráticas se precisa como procedimiento para transferir de estas representaciones a la representación gráfica, el uso del ploteo de puntos, es decir, construir primero una tabla (representación tabular) y luego representar los puntos en un sistema de coordenadas rectangulares y trazar el gráfico. Por otra parte, no se especifica ningún procedimiento que permita transferir entre estas dos representaciones analíticas que se estudian.

Los contenidos que se refieren a este campo de la Matemática, según su concepción actual, comienzan a partir del estudio de la función $y = x^2$, $x \in \Re$. Precisamente la video-clase 81 trata este contenido y en ella lo que inicialmente se hace, relacionado con las representaciones analíticas y gráfica de estas funciones y la transferencia entre estas representaciones es partir de la representación analítica de la función $y = x^2$, $x \in \Re$, construir su gráfico transfiriendo primero a una representación tabular mediante el ploteo de puntos.

Luego, en la video-clase 82 se induce el significado geométrico del parámetro **a** en funciones del tipo $y = \mathbf{a}x^2$, $x \in \Re$ ($\mathbf{a} \neq 0$) a partir de visualizar imágenes con el asistente matemático Equation Grapher que muestran gráficas de funciones obtenidas de sus respectivas representaciones analíticas con distintos valores para el parámetro **a**. Por otro lado, se grafican funciones de este tipo a partir del ploteo de puntos, es decir, se continúa transfiriendo solo de la representación analítica a su representación gráfica.

En la video-clase 83, se estudia la función del tipo $y = \mathbf{a}x^2+\mathbf{b}x+\mathbf{c}$, ($x \in \Re$, $\mathbf{a} \neq 0$ y $\mathbf{b}=0$). Aquí se induce el significado geométrico del parámetro c transfiriendo de la representación estándar de varias funciones cuadráticas a su gráfica mediante el ploteo de puntos.

La función $y = \mathbf{a}x^2+\mathbf{b}x+\mathbf{c}$ ($x \in \Re$ y $\mathbf{a} \neq 0$) se estudia en la video-clase 84. En esta video-clase se centra la atención solo en la transferencia de la representación estándar a su representación gráfica a partir de determinar el vértice del gráfico de la función y el intercepto con los ejes de coordenadas.

En la video-clase 85, dedicada a las propiedades de las funciones cuadráticas, no se proponen ejercicios cuya exigencia principal sea la de transferir entre representaciones de las funciones cuadráticas, sino que se dedica la mayor atención a resolver tareas cuya exigencia consiste en encontrar una representación analítica estándar de una función cuadrática que cumpla con algunas condiciones geométricas.

En la video-clase 86 se muestran ejercicios particulares donde la exigencia es transferir de la representación estándar a la canónica de las funciones cuadráticas. En esta también se muestran ejercicios particulares que requieren pasar de la representación canónica a la gráfica de estas funciones.

El principal problema que aparece cuando se resuelven los ejercicios que exigen transferir de la representación canónica a la representación gráfica es que no se determinan tres puntos para trazar el gráfico sino que solo se determina el vértice y luego se hace un esbozo del gráfico, descuidando la posible contracción o dilatación que pueden presentar estas funciones respecto a su eje de simetría en comparación con la función $y = x^2$, $x \in \Re$.

Por otro lado, las tareas que se proponen para el estudio independiente que se orienta en esta video-clase exige transferir de la representación estándar de una función cuadrática a su representación gráfica y la idea que se sigue para resolver los ejercicios orientados, es transferir primero a su representación canónica, y una vez hecha la transferencia hacia esta representación se determina el vértice del gráfico y los ceros de la función para trazar el gráfico.

En la video-clase 87 se propone otro ejercicio cuya exigencia consiste en transferir de la representación analítica estándar a la representación gráfica y se utiliza, en la solución que se presenta para este, la idea de transferir primero a la representación canónica; pero a la hora de determinar al menos tres puntos para trazar el gráfico solo se determina su vértice porque no existe intercepto con el eje de las abscisas.

En las video-clases 88, 89, 90 y 91 se proponen ejercicios que exigen transferir de la representación estándar de funciones cuadráticas a sus respectivas representaciones gráficas. Solo en la video-clase 92 (última que trata los contenidos relacionados con las funciones cuadráticas) se presenta un ejercicio que exige transferir de la representación gráfica a la representación estándar.

Resumiendo:

El estudio de las funciones cuadráticas, en lo relacionado con sus representaciones analíticas y gráfica y la transferencia entre estas, según su concepción actual a partir de lo tratado en las video-clases dedicadas a estos contenidos, se caracteriza por la resolución de tareas que mayormente exigen transferir de la representación estándar a la gráfica, pasando primero por una representación tabular ya que esta transferencia se hace utilizando el ploteo de puntos como procedimiento general. El uso de las demás representaciones analíticas es poco frecuente. No se realizan transferencias a (desde) la representación multiplicativa y es insuficiente el número de ejercicios que exigen transferir de la representación gráfica a algunas de las representaciones analíticas.

En la figura 4 se representa el número de ejercicios que aparecen en las video-clases (MINED, 2004d; MINED, 2004e; MINED, 2004f; MINED, 2004g) referidos a la transferencia entre representaciones analíticas y gráfica de funciones cuadráticas.

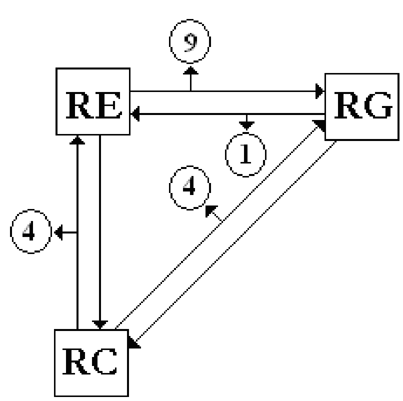


Fig. 4: Ejercicios propuestos en las video-clases referidos a la transferencia entre representaciones analíticas y gráfica de funciones cuadráticas.

El número que aparece entre dentro de los círculos representa la cantidad de ejercicios que se proponen y que exigen transferir desde la representación que tiene el origen de la flecha hasta la que tiene la saeta. En los casos donde no aparece ningún número entre dos representaciones es porque no se proponen ejercicios que exijan esa transferencia.

En el caso de los nueve ejercicios que exigen transferir de la representación estándar a la representación gráfica, cuatro de ellos muestran una representación particular la cual coincide con una representación canónica, aunque hasta ese momento no se ha tratado la existencia de esta forma de representar analíticamente una función cuadrática.

Por otra parte, los cuatro ejercicios que se proponen y que exigen transferir de la representación estándar a la canónica son componentes de un problema auxiliar que se presenta en el momento de resolver un ejercicio. Esta transferencia se utiliza solo para determinar el vértice del gráfico de la función a partir de la representación canónica de esta; así mismo sucede con los ejercicios que exigen transferir de la representación canónica a la gráfica, es decir, esta transferencia se muestra solo con el objetivo de determinar el vértice de la representación gráfica, en ningún momento se determinan otros puntos para trazar el gráfico a partir de la representación canónica.

En el libro de texto de noveno grado (Muñoz y otros, 1991) aparece los contenidos que se refieren a las funciones cuadráticas. En este no se utiliza la representación analítica canónica ni la analítica multiplicativa para representar las funciones cuadráticas.

En la figura 5 se representa el número de ejercicios que aparecen en Muñoz y otros (1991) referidos a la transferencia entre representaciones analíticas y gráfica de funciones cuadráticas.

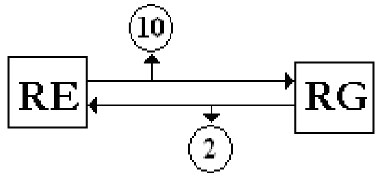


Fig. 5: Ejercicios propuestos en el libro de texto de noveno grado referidos a la transferencia entre representaciones analíticas y gráfica de funciones cuadráticas.

2.1.2. Descripción de la Alternativa Didáctica

La Alternativa Didáctica elaborada fue concebida teniendo en cuenta los fundamentos teóricos asumidos en el Capítulo I. En esta se concibe un cambio en el ordenamiento de los contenidos referidos a las funciones cuadráticas, se desarrolla su dosificación y se incluyen nuevos procedimientos de transferencia entre representaciones de estas funciones. Además se conciben cambios en la dinámica de algunas de las funciones didácticas como por ejemplo: en el aseguramiento del nivel de partida y en la orientación y control del estudio independiente, en algunas clases.

En la video-clase 81 comienzan a tratarse los contenidos referidos a las funciones cuadráticas, en la alternativa se plantea utilizar esta video-clase, pero cambiando las tareas para el estudio independiente, así como la forma de organización del grupo para realizarlas. Específicamente se propone dividir al grupo en tres equipos de forma intencional, procurando que en cada uno de ellos existan alumnos aventajados en la asignatura de Matemática y con habilidades en la utilización del asistente matemático Equation Grapher.

Las tareas para el estudio independiente tienen la formulación siguiente:

Dada las representaciones analíticas siguientes de funciones cuadráticas cuyo dominio es el conjunto de los números reales. Represéntalas utilizando el asistente matemático Equation Grapher. Copia en tu libreta el resultado de estas representaciones y haz un análisis donde expreses la “posible relación que existe entre la representación analítica y gráfica de cada una de estas funciones”.

Las funciones a utilizar, para cada equipo, son las siguientes:

Primer equipo.

a) $f(x) = x^2$	f) $f(x) = -5x^2$
b) $f(x) = 2x^2$	g) $f(x) = 0,8x^2$
c) $f(x) = 5x^2$	h) $f(x) = 0,3x^2$
d) $f(x) = -x^2$	i) $f(x) = -0,8x^2$
e) $f(x) = -2x^2$	j) $f(x) = -0,3x^2$

Segundo equipo.

a) $f(x) = x^2$	f) $f(x) = x^2 – x$
b) $f(x) = x^2 + x$	g) $f(x) = x^2 – 2x$
c) $f(x) = x^2 + 2x$	h) $f(x) = x^2 – 3x$
d) $f(x) = x^2 + 3x$	i) $f(x) = x^2 – 4x$
e) $f(x) = x^2 + 4x$	

Tercer equipo.

a) $f(x) = x^2$	f) $f(x) = x^2 - 1$
b) $f(x) = x^2 + 1$	g) $f(x) = x^2 - 2$
c) $f(x) = x^2 + 2$	h) $f(x) = x^2 - 3$
d) $f(x) = x^2 + 3$	i) $f(x) = x^2 - 4$
e) $f(x) = x^2 + 4$	

En la segunda clase sobre las funciones cuadráticas se propone estudiar la transferencia de la representación analítica estándar a la representación gráfica de estas funciones. En el aseguramiento del nivel de partida se debe hacer énfasis en las proposiciones que los estudiantes formularon, como respuesta a la tarea para el estudio independiente, referida a la relación entre las representaciones analíticas y el gráfico de cada una de estas funciones cuadráticas.

En el desarrollo de esta clase se deben tratar, primeramente, los casos particulares siguientes:

- ✓ Las funciones del tipo y = $\mathbf{a}x^2$, $x \in \Re$ ($\mathbf{a} \neq 0$), en este caso se debe guiar la atención de los estudiantes para que constaten que los tres puntos cómodos que pueden determinarse para construir el gráfico son: el vértice del gráfico de la función (0; 0), el punto (1; **a**) y su simétrico (-1; **a**).

- ✓ Las funciones del tipo y = $x^2+\mathbf{b}x$, $x \in \Re$ ($\mathbf{b} \neq 0$), en este caso debe lograrse que los estudiantes concluyan que siempre los ceros son x = -**b** y x = 0, los cuales se calculan igualando a cero el miembro derecho de la ecuación, extrayendo factor común x, igualando los dos factores resultantes a cero y resolviendo las ecuaciones lineales obtenidas. Para construir el gráfico se deben determinar los puntos (-**b**; 0), (0; 0) y el vértice. Este último se determina a partir de un análisis sencillo donde su abscisa se calcula, gracias a la propiedad que tienen estas funciones de dominio $\Re$ de ser simétricas respecto a un eje, promediando las abscisas de los puntos (-**b**; 0) y (0; 0), y la ordenada del vértice se calcula sustituyendo la abscisa del vértice en la ecuación y = $x^2+\mathbf{b}x$. El vértice del gráfico de las funciones de este tipo es ($\frac{-b}{2}; -\left(\frac{b}{2}\right)^2$).

- ✓ Las funciones del tipo y = $\mathbf{a}x^2+\mathbf{b}x$, $x \in \Re$ ($\mathbf{a}\neq 0$, $\mathbf{a}\neq 1$, $\mathbf{b}\neq 0$), cuyos ceros son x=-$\frac{b}{a}$ y x=0, los cuales se calculan de forma análoga al caso anterior. Para construir el gráfico se deben determinar los puntos (-$\frac{b}{a}$; 0), (0; 0) y el vértice que se obtiene, también, igual que en el caso anterior y tiene por representación ($\frac{-b}{2a}$; -$\frac{b^2}{4a}$).

- ✓ Las funciones del tipo $y = x^2 + \mathbf{c}$, $x \in \Re$ ($\mathbf{c} \neq 0$), en este caso se le debe hacer saber a los estudiantes que el gráfico de estas funciones siempre tiene como vértice el punto (0; **c**) y los dos restantes puntos que se deben determinar para construir el gráfico son (-1; **c**+1) y su simétrico (1; **c**+1).
- ✓ Las funciones del tipo $y = \mathbf{a}x^2 + \mathbf{c}$, $x \in \Re$ ($\mathbf{a} \neq 0$, $\mathbf{a} \neq 1$, $\mathbf{c} \neq 0$), y el análisis que debe hacerse en este caso es el mismo que para el caso anterior.

Luego se propone transferir de la representación analítica estándar $y = \mathbf{a}x^2 + \mathbf{b}x + \mathbf{c}$ ($x \in \Re$, $\mathbf{a} \neq 0$, $\mathbf{b} \neq 0$, $\mathbf{c} \neq 0$) a la representación gráfica a partir de determinar los tres puntos cómodos que se precisaron en el epígrafe 1.2.1 del capítulo I.

El profesor según la caracterización que tenga de los estudiantes del grupo debe presentar tareas en forma de ejemplos para realizar transferencias en cada caso particular.

Los ejercicios que se propone utilizar en la clase son:

Ejercicio # 1

Representa gráficamente las funciones, de dominio $\Re$, que se muestran a continuación:

a) $y = x^2$	d) $y = 2x^2 - 3$
b) $y = 2x^2$	e) $y = -x^2 + 2x$
c) $y = -3x^2$	f) $y = 2x^2 + 4x - 3$

Ejercicio # 2

A continuación se muestra una lista desordenada con los pasos del procedimiento para transferir de la representación analítica expresada en la forma $y = \mathbf{a}x^2 + \mathbf{b}x + \mathbf{c}$ a la representación gráfica de estas funciones, con lápiz y papel. Ordene los pasos según la secuencia en que deben realizarse.

1. Representar tres o más puntos en el sistema de coordenadas rectangulares.
2. Trazar la curva que pase por los tres o más puntos representados.

3. Determinar tres o más puntos que pertenezcan al gráfico.

Como tarea para el estudio independiente se propone los siguientes ejercicios:

Ejercicio # 1

Representa gráficamente las funciones, de dominio $\Re$, que se muestran a continuación:

a) $y = -x^2+5x-3$ c) $y = 2x^2 +1$

b) $y = x^2+6x-3$ d) $y = -x^2 -5x$

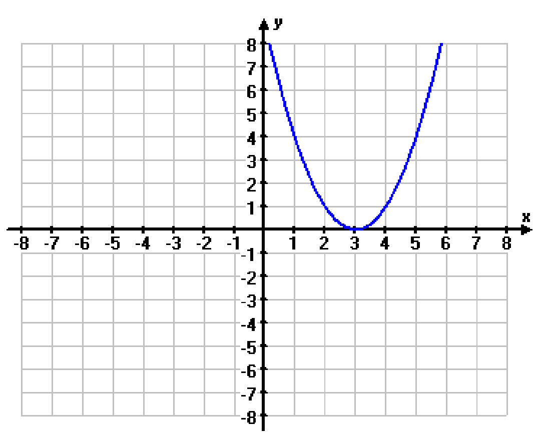
En las restantes clases sobre el estudio de las funciones cuadráticas se propone utilizar como procedimientos para transferir los señalados en el epígrafe 1.2.1 del capítulo I.

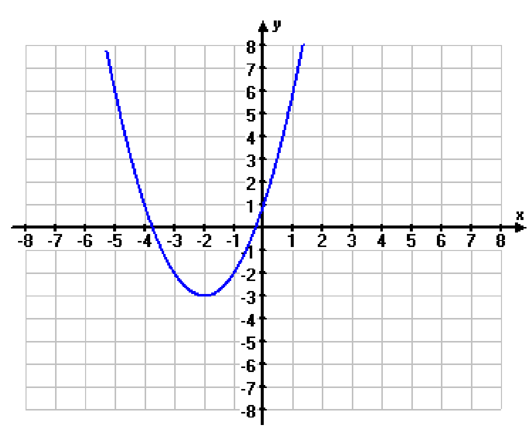
En la tercera clase se propone estudiar la transferencia de la representación gráfica a la representación estándar. En esta clase se debe lograr que los estudiantes concluyan que la representación buscada se obtiene de forma mucho más fácil si se utiliza determinados puntos que pertenezcan al gráfico, por ejemplo: el punto de intersección del gráfico con el eje de las ordenadas.

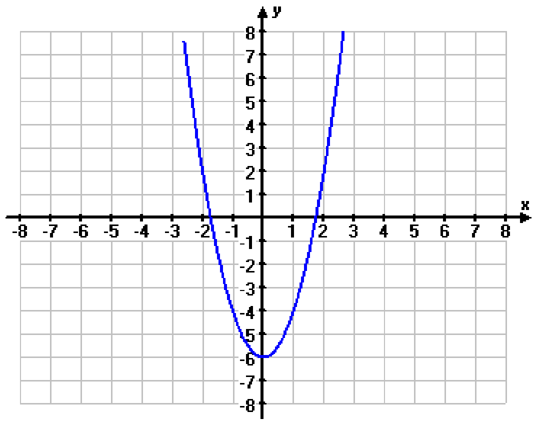
Los ejercicios que se orienta utilizar en esta clase son:

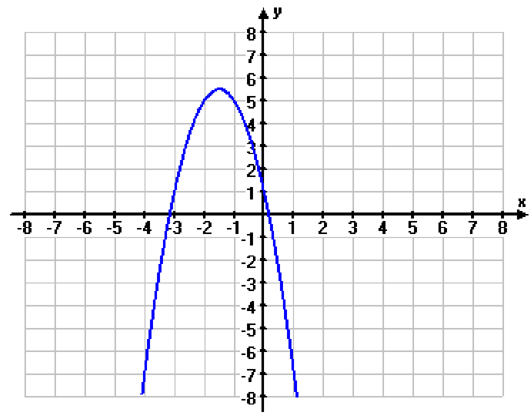
Ejercicio # 1

Representa en la forma estándar las funciones que se muestran a continuación.

a) 

b) 

c) 

d) 

Ejercicio # 2

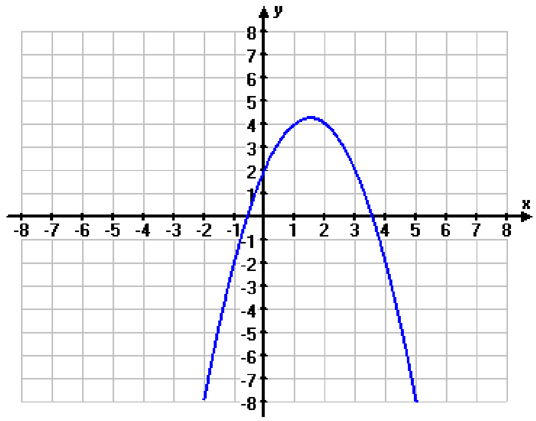
En la lista siguiente aparecen, excepto uno, los pasos para transferir de la representación gráfica de una cuadrática a la representación analítica estándar. Escribe el paso que falta.

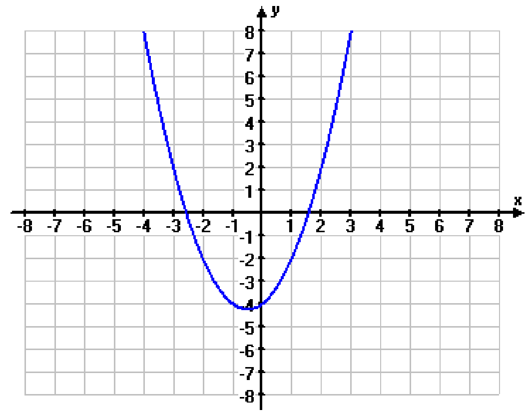
1. Determinar el valor del parámetro **c** y las coordenadas de dos de los puntos por donde pasa el gráfico.
2. Formar un sistema de ecuaciones lineales a partir de sustituir el valor del parámetro **c** y las coordenadas de los dos puntos determinados.
3. Resolver el sistema de ecuaciones lineales y determinar los valores de los parámetros **a** y **b**.

Como tarea para el estudio independiente se proponen los siguientes ejercicios:

Ejercicio # 1

Representa en la forma estándar las funciones siguientes.

a) 

b) 

Ejercicio # 2

Escribe los pasos que deben realizarse para transferir de una representación gráfica, donde no se conoce el punto de intersección con el eje de las ordenadas, a la representación analítica estándar de una función cuadrática.

Ejercicio # 3

Dadas las representaciones analíticas siguientes de funciones cuadráticas cuyo dominio es el conjunto de los números reales. Represéntalas utilizando el asistente matemático Equation Grapher. Copia en tu libreta el resultado de estas representaciones y haz un análisis donde expreses la “posible relación que existe entre la representación analítica y gráfica de cada una de estas funciones”.

a) $f(x) = x^2$	f) $f(x) = (x - 1)^2$
b) $f(x) = (x + 1)^2$	g) $f(x) = (x - 2)^2$
c) $f(x) = (x + 2)^2$	h) $f(x) = (x - 3)^2$
d) $f(x) = (x + 3)^2$	i) $f(x) = (x - 4)^2$
e) $f(x) = (x + 4)^2$	

En la cuarta clase se propone estudiar la transferencia de la representación canónica a la representación gráfica. Los ejercicios a utilizar son:

Ejercicio # 1

Transfiere a la representación gráfica las funciones, de dominio $\Re$, que se muestran a continuación.

a) $y = x^2$ d) $y = -(x - 3)^2 + 1$

b) $y = (x + 2)^2$ e) $y = (x + 2)^2 + 5$
c) $y = x^2 - 3$ f) $y = -2(x + 5)^2 - 1$

Ejercicio # 2

A continuación se muestran todos los pasos, excepto uno, necesarios para transferir de la representación analítica de una función cuadrática, de dominio $\Re$, a su representación gráfica, con lápiz y papel.

1. Determinar las coordenadas del vértice.
2. Determinar otros dos o más puntos que pertenezcan al gráfico.
3. Trazar la curva que pase por los tres o más puntos.

Diga cuál es el paso que falta y en qué posición debe estar.

Como tarea para el estudio independiente se proponen los siguientes ejercicios:

Ejercicio # 1

Representa gráficamente las funciones, de dominio $\Re$, que se muestran a continuación.

a) $y = -2(x + 5)^2 - 1$ c) $y = 5x^2 +1$

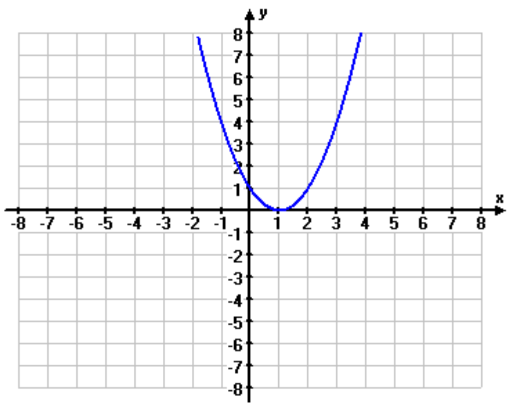
b) $y = 3(x + 2)^2$ d) $y = -(x -3)^2 - 1$

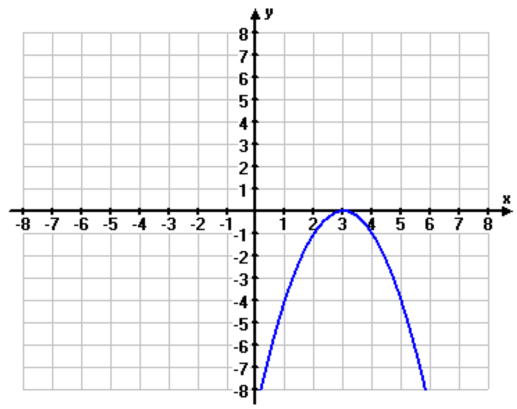
En la quinta clase se propone estudiar la transferencia de la representación gráfica a la representación canónica. Al igual que para el caso de transferir de la representación gráfica a la representación estándar, se debe lograr que los estudiantes concluyan que la representación buscada se obtiene de forma mucho más fácil en dependencia de los puntos que se utilicen y que pertenezcan al gráfico.

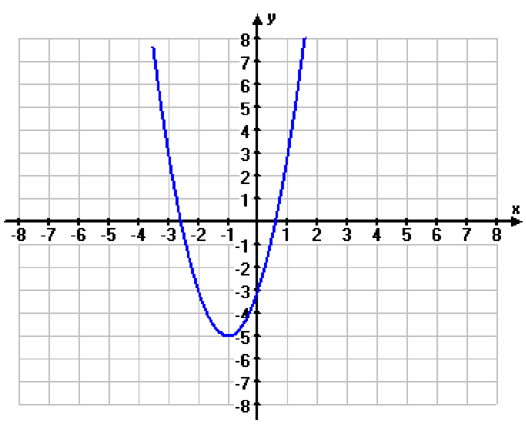
Los ejercicios a utilizar en esta clase son:

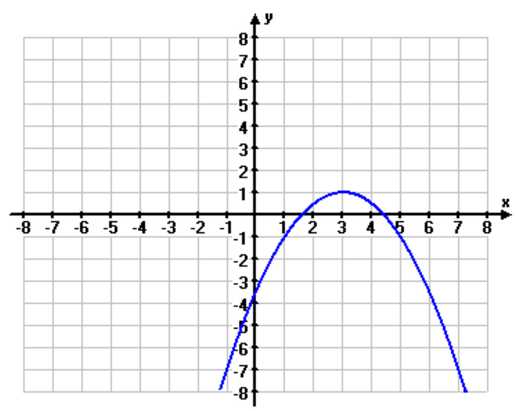
Ejercicio # 1

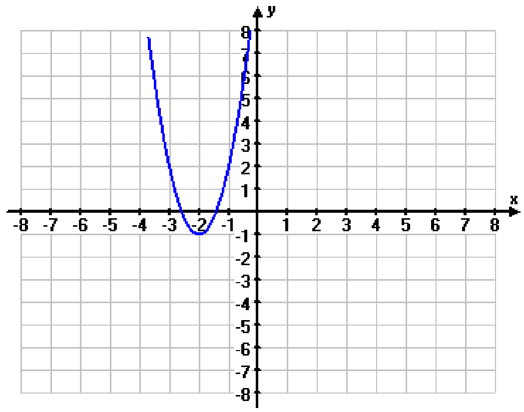
Representa en la forma canónica las funciones que se muestran a continuación.

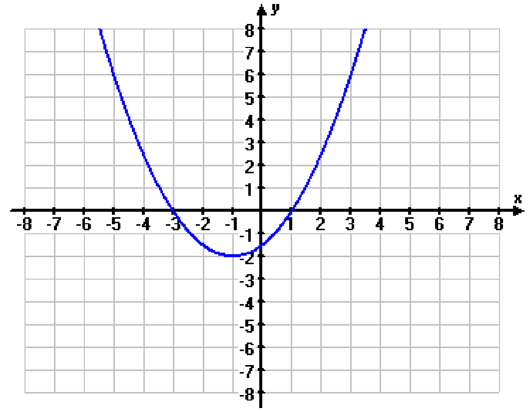
a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

f) 

Ejercicio # 2

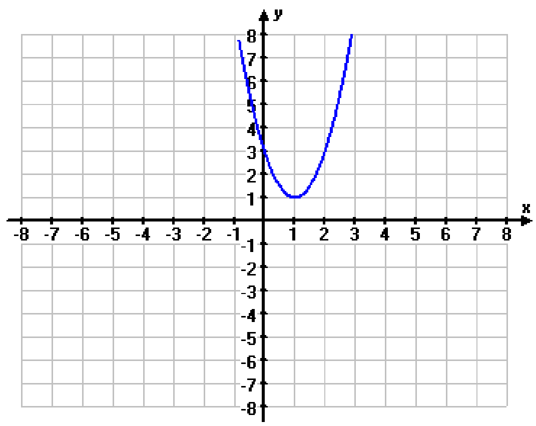
En la lista siguiente aparecen, excepto uno, los pasos para transferir de la representación gráfica de una función cuadrática, donde no se pueden identificar las coordenadas del vértice, a la representación analítica canónica, con lápiz y papel. Escribe el paso que falta.

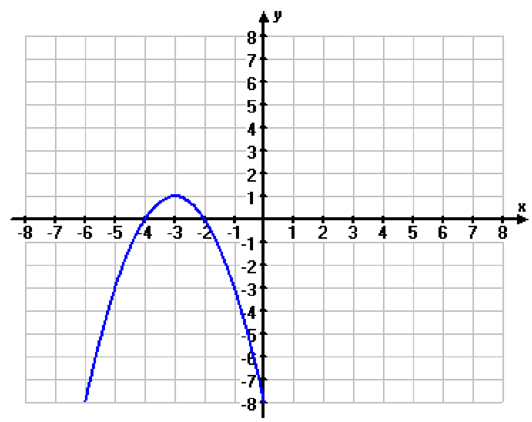
1. Determinar las coordenadas de tres puntos por donde pasa el gráfico.
2. Formar un sistema de ecuaciones lineales a partir de sustituir las coordenadas de los tres puntos determinados.
3. Escribir la representación analítica.

Como tarea para el estudio independiente se proponen los siguientes ejercicios:

Ejercicio # 1

Transfiere a la forma canónica las siguientes funciones.

a) 

b) 

En la sexta clase se propone estudiar la transferencia de la representación estándar a la representación canónica. En esta clase se debe partir de presentar casos particulares con determinados valores específicos para los parámetros donde ambas representaciones coincidan y luego generalizar los casos donde siempre coinciden.

Los ejercicios a utilizar en esta clase son:

Ejercicio # 1

Dadas las siguientes representaciones de funciones cuadráticas transfiere a su representación canónica.

a) $y = x^2+5x$ d) $y = -x^2+x-3$

b) $y = x^2-6x-2$ e) $y = 7x^2+3$

c) $y = 2x^2-x-1$ f) $y = -3x^2-4x$

Ejercicio # 2

A continuación se muestra una lista desordenada de los pasos del procedimiento para transferir de la representación analítica estándar $y= \mathbf{a}x^2+\mathbf{b}x+\mathbf{c}$ ($\mathbf{a}\neq0$, $\mathbf{a}\neq1$, $\mathbf{b}\neq0$, $\mathbf{c}\neq0$ y $\mathbf{b}^2 \neq 4\mathbf{ac}$) a la representación analítica en a forma canónica $y=\mathbf{a}(x+ \mathbf{d})^2+\mathbf{e}$, con lápiz y papel. Ordénalos según la secuencia de realización.

1. Aplicar completamiento cuadrático al binomio que multiplica al factor "**a**".
2. Verificar que $\mathbf{b}^2 \neq 4\mathbf{ac}$.
3. Aplicar propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la sustracción a la derecha, en el producto del factor "**a**" y la expresión que contiene el cuadrado del binomio obtenido en el completamiento cuadrático.
4. Extraer factor común "**a**" a la izquierda en el binomio formado por los términos cuadrático y lineal del miembro derecho de la ecuación funcional.
5. Realizar operación aritmética con los términos numéricos de la expresión obtenida en el paso anterior.

Como tarea para el estudio independiente se proponen los siguientes ejercicios:

Transfiere a la representación canónica las funciones que se muestran a continuación.

Ejercicio # 1

a) $y = x^2+8x$ d) $y = -x^2+x-2$

b) $y = x^2-6x-5$ e) $y = -3x^2+3$

En la séptima clase se propone estudiar la transferencia de la representación canónica a la representación estándar. En esta clase se deben recodar los casos en que ambas representaciones coinciden.

Los ejercicios a utilizar son:

Ejercicio # 1

Dadas las siguientes representaciones canónicas de funciones cuadráticas transfiere a su representación estándar.

a) $y = x^2$ d) $y = -(x - 2)^2 + 3$

b) $y = (x + 1)^2$ e) $y = (x + 1)^2 + 5$

c) $y = x^2 - 4$ f) $y = -2(x + 5)^2 - 3$

Ejercicio # 2

En la lista siguiente aparecen, excepto uno, los pasos para transferir de la representación canónica y=**a**(x+**d**)^2+**e**, (**a**≠0, **a**≠1, **d**≠0, **e**≠0) a la representación estándar, con lápiz y papel. Escribe el paso que falta.

1. Desarrollar el producto notable (x+**d**)^2.
2. Sumar términos semejantes.

Como tarea para el estudio independiente se proponen los siguientes ejercicios:

Ejercicio # 1

Transfiere a la representación estándar las funciones que se muestran a continuación.

a) $y = (x + 1)^2 + 5$ d) $y = -(x - 7)^2 + 3$

b) $y = (x + 6)^2$ e) $y = 4(x - 1)^2 + 2$
c) $y = 3x^2 - 4$ f) $y = -2(x + 5)^2 - 3$

En la clase octava se debe ejercitar los contenidos tratados en las clases anteriores. Aquí se propone orientar ejercicios donde se exija realizar transferencias no directas. Cuando el docente considere necesario puede utilizar otra clase, de las de reserva, para la ejercitación de estos contenidos.

Los ejercicios a utilizar en esta clase son:

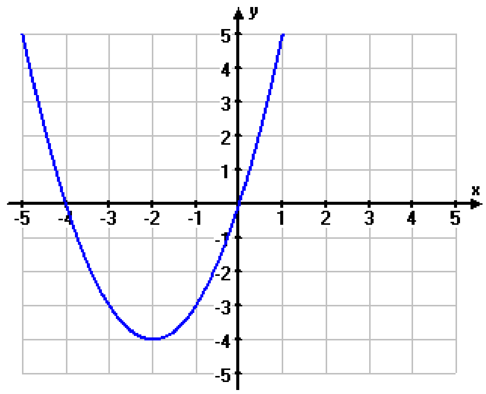
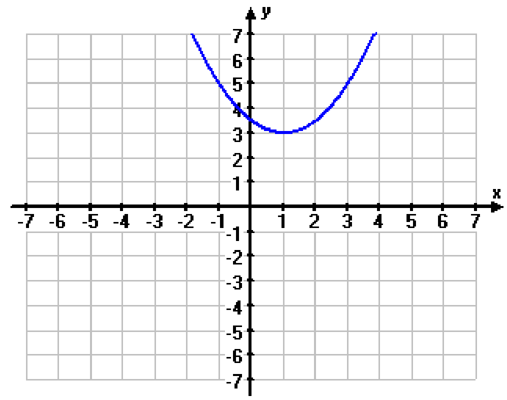
Ejercicio # 1

Dadas las siguientes funciones, represéntalas gráficamente pasando primero por la representación canónica.

a) $y = x^2 + 4x$ b) $y = -2x^2 + 3x - 1$

Ejercicio # 2

Transfiere a la representación estándar pasando primero por la representación canónica.

a)  b) 

Ejercicio # 3

Escribe la representación analítica canónica de la función cuadrática que cumple con las condiciones siguientes:

1- El gráfico corta al eje de las abscisas en los puntos (-3; 0) y (1; 0).
2- Tiene un mínimo en y = -4.

Es importante discutir en el pizarrón las distintas vías por la cuales se pueda resolver el cuarto ejercicio que se propone en esta clase. Seguidamente se presentan los pasos que se deben seguir para resolver el ejercicio según distintas vías de solución.

1. vía (pasos para resolver el ejercicio).
   - Determinar las coordenadas del vértice.
   - Formar un sistema de ecuaciones, con la forma y=**a**x^2+**b**x+**c**, a partir de sustituir las coordenadas del vértice y las de los dos puntos que interceptan al eje de las abscisas.
   - Resolver el sistema de ecuaciones y determinar el valor de los parámetros **a**, **b** y **c**.
   - Escribir la función en su representación estándar y transferir de esta a la forma canónica.

2. vía (pasos para resolver el ejercicio).

   - Determinar las coordenadas del vértice.
   - Formar una ecuación, con la forma y=**a**(x+**d**)^2+**e**, a partir de sustituir las coordenadas del vértice y la de uno de los dos puntos que interceptan al eje de las abscisas.
   - Resolver la ecuación y determinar el valor del parámetro **a**.
   - Escribir la función en la forma canónica.

Aunque existen más vías de solución para el ejercicio 4, la más racional es la que se presenta en la segunda vía.

En la novena clase, última para tratar los contenidos relacionados con las funciones cuadráticas, se propone aplicar una prueba para medir el desarrollo alcanzado por los estudiantes en la habilidad para transferir entre representaciones analíticas y gráfica de funciones cuadráticas. Los ejercicios que se orienta utilizar, para esta prueba, son los siguientes:

1- Representa en la forma estándar o canónica, según corresponda, las funciones siguientes.

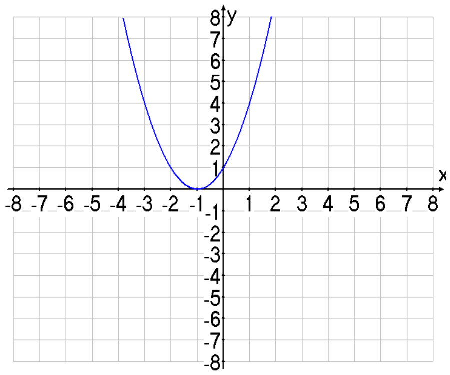
a) $f(x) = x^2 + 2x - 9$ b) $f(x) = -(x + 2)^2 + 3$

2- En las siguientes representaciones analíticas de funciones, transfiere directamente hacia su representación gráfica.

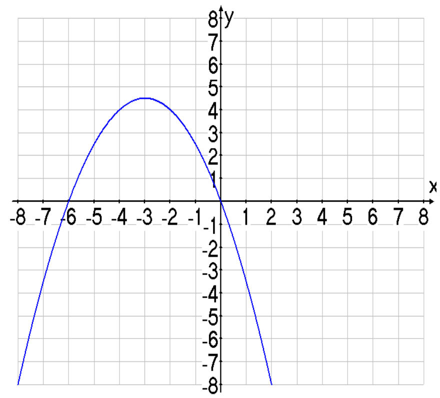
a) $f(x) = (x - 2)^2 - 4$ b) $f(x) = -x^2 - x + 4$

3- En las siguientes representaciones gráficas de funciones, transfiere directamente hacia la representación analítica en la forma estándar.

a)

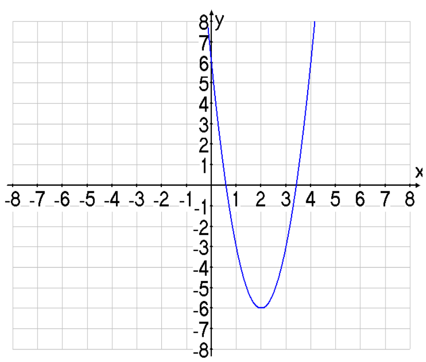


b)

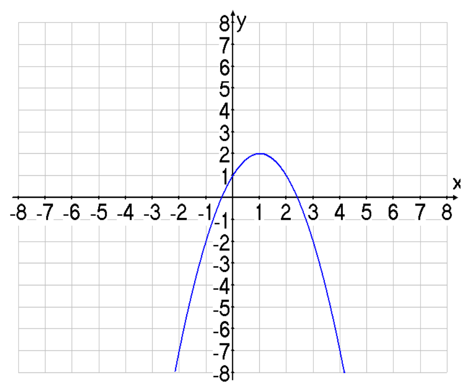


4- En las siguientes representaciones gráficas de funciones, transfiere directamente hacia la representación analítica en la forma canónica.

a)



b)



5- A continuación se muestra una lista desordenada de los pasos del procedimiento para transferir de la representación analítica expresada en la forma $y = \mathbf{a}x^2+\mathbf{b}x+\mathbf{c}$ a la representación gráfica, con lápiz y papel. Ordena los pasos según la secuencia de su realización.

1. Representar tres o más puntos en el sistema de coordenadas rectangulares.
2. Determinar tres o más puntos que pertenezcan al gráfico.
3. Trazar la curva que pase por los tres o más puntos representados.

6- Transfiere las siguientes representaciones analíticas de funciones cuadráticas a su representación gráfica.

a) $f(x) = x^2 -5x +3$ b) $f(x) = - (x - 2)^2 + 6$

7- Escribe la representación analítica estándar de la función cuadrática que cumple las siguientes condiciones:

- Su eje de simetría es la recta x=3.
- Tiene un máximo en y=2
- El gráfico no está contraído o dilatado respecto a su eje de simetría, en comparación con el gráfico de la función $f(x) = x^2$, $x \in \Re$.

2.1.3. Relación de la Alternativa Didáctica con el resultado didáctico al que sustituye

En la concepción actual de estudio de las funciones cuadráticas como contenido de enseñanza – aprendizaje no se organiza el proceso de manera que permita a los estudiantes desarrollar la habilidad para transferir entre representaciones analíticas y gráfica de estas funciones. Específicamente no se proponen suficientes ejercicios que permitan transferir de la representación gráfica a algunas de las representaciones analíticas, ni ejercicios que exijan transferir de la representación canónica a la estándar o transferencias no directas. Por otro lado, no se estudian procedimientos generales que permitan transferir entre las representaciones que se estudian.

En esta alternativa se hace una generalización de los procedimientos que se deben seguir para transferir de una representación a otra y se presentan ejercicios para realizar transferencias directas e indirectas teniendo en cuenta que primeramente se debe formar la habilidad y luego desarrollarse.

Por último, el aspecto relacionado con la evaluación del desarrollo alcanzado en la habilidad para transferir entre representaciones analíticas y gráfica de funciones cuadráticas, en la concepción actual, se deja a iniciativa del docente mientras que en la alternativa se presentan ejercicios particulares que el docente puede utilizar para realizar la evaluación de este contenido de estudio de la funciones cuadráticas.

2.2. Experimentación de la Alternativa Didáctica en la práctica pedagógica

En esta sección se describe cómo fue organizado el pre-experimento para implementar la Alternativa Didáctica en la práctica pedagógica. Además se operacionaliza la variable dependiente y se utiliza para precisar los resultados que se obtuvieron al implementar la Alternativa.

2.2.1. Organización del pre-experimento

Selección de la muestra y su justificación.

En el momento de implementar la alternativa en la práctica pedagógica el profesor identificó la población que se tuvo en cuenta para seleccionar la muestra. En este sentido procuró que la misma cumpliera con los requisitos necesarios.

La población identificada estaba formada por los 275 alumnos y alumnas que integraron el décimo grado del Instituto Preuniversitario Vocacional de Ciencias Exactas "Eusebio Olivera Rodríguez" en el curso 2006 - 2007. De este universo se extrajo una muestra no probabilística de tipo intencional, la cual estaba constituida por los 30 estudiantes que conformaban el grupo 7 de décimo grado.

La razón por la cual esta muestra fue seleccionada de forma intencional es por ser este grupo uno de los que se le asignó al autor de este trabajo para impartirle clases.

Aunque la muestra, como se mencionó anteriormente, fue seleccionada de forma intencional, esta cumple con requisitos necesarios que se deben tener en cuenta para su determinación. Entre estos requisitos se pueden citar los siguientes:

- Reproduce las características de la población en lo relacionado con el lugar de residencia de los estudiantes que integran cada uno de los grupos que conforman esta población.
- Cumple con el tamaño que debe tener con relación a la población, en este sentido se ha precisado que "*estadísticamente se establecen límites*

porcentuales en la proporción que debe guardar la muestra en relación con el tamaño de la población […] el límite mínimo de confiabilidad se sitúa en el 10 % de la población.” (Cerezal et al., 2006, p. 15).

Operacionalización de la variable dependiente.

En este trabajo se precisa como variable independiente la Alternativa Didáctica y como variable dependiente el nivel de desarrollo de la habilidad para transferir entre representaciones analíticas y gráfica de funciones cuadráticas. Las variables ajenas o colaterales están señaladas en el anexo 20.

Teniendo presente que en la sección 1.3 del capítulo I se señala que el desarrollo de una habilidad depende de la efectividad, eficacia y eficiencia con que se pueda ejecutar un procedimiento se puede llegar a la conclusión de que para medir el nivel alcanzado, por parte de los estudiantes, en el desarrollo de la habilidad para transferir entre representaciones analíticas y gráfica de funciones cuadráticas se debe precisar las siguientes dimensiones con sus respectivos indicadores que se muestran en la tabla 2.

Tabla 2: Dimensiones e indicadores del nivel de desarrollo de la habilidad para transferir entre representaciones analíticas y gráfica de funciones cuadráticas.

Dimensiones	**Indicadores**
1) Cognitiva	1.1 Conocimiento de los pasos que componen el procedimiento. 1.2 Conocimiento del orden de los pasos. 1.3 Conocimiento de la realización de cada paso.
2) Actuativa	2.1 Efectividad del dominio del procedimiento. 2.2 Eficacia del dominio del procedimiento. 2.3 Eficiencia del dominio del procedimiento.

3) Comunicacional	3.1 Utilización del lenguaje técnico de la asignatura. 3.2 Crítica ante sus propias dificultades a la hora de transferir. 3.3 Crítica ante las dificultades de los demás.

El diseño de la medición. Las tareas evaluativas y el método de interpretación.

Para medir los efectos de la implementación de la Alternativa Didáctica concebida se representan seguidamente, en las tablas 3, 4 y 5, los indicadores y la variable estadística que se le asigna a cada uno de ellos.

Tabla 3: Variables estadísticas de los indicadores de la dimensión 1 (cognitiva)		
No.	**Indicador**	**Variable estadística**
1.1	Conocimiento de los pasos que componen el procedimiento.	PCP
1.2	Conocimiento del orden de los pasos.	OPP
1.3	Conocimiento de la realización de cada paso.	RPP

Tabla 4: Variables estadísticas de los indicadores de la dimensión 2 (actuativa)		
No.	**Indicador**	**Variable estadística**
2.1	Efectividad del dominio del procedimiento.	COP
2.2	Eficacia del dominio del procedimiento.	ASD
2.3	Eficiencia del dominio del procedimiento.	ART

Tabla 5: Variables estadísticas de los indicadores de la dimensión 3 (comunicacional)		
No.	**Indicador**	**Variable estadística**
2.1	Utilización del lenguaje técnico de la asignatura.	ULT
2.2	Crítica ante sus propias dificultades a la hora de transferir.	CPD
2.3	Crítica ante las dificultades de los demás.	CDD

En la tabla 6 se muestra la variable estadística que se le asigna a cada procedimiento de transferencia para medir su efectividad.

Tabla 6: Variables estadísticas para medir la efectividad de los procedimientos para transferir entre representaciones analíticas y gráficas de funciones cuadráticas.	
Procedimientos	**Variable estadística**
Conocimiento del procedimiento para transferir de la representación analítica expresada en la forma canónica a la representación gráfica, utilizando lápiz y papel.	ACG
Conocimiento del procedimiento para transferir de la representación gráfica a la expresada en la forma canónica, utilizando lápiz y papel.	GAC
Conocimiento del procedimiento para transferir de la representación expresada en la en la forma estándar a la representación gráfica, utilizando lápiz y papel.	AEG
Conocimiento del procedimiento para transferir de la representación gráfica a la expresada en la forma estándar, utilizando lápiz y papel.	GAE
Conocimiento del procedimiento para transferir de la representación expresada en la forma estándar a la expresada en la forma canónica, utilizando lápiz y papel.	AEC
Conocimiento del procedimiento para transferir de la representación expresada en la forma canónica a la expresada	ACE

en la forma estándar, utilizando lápiz y papel.	

La medición de los indicadores y de la efectividad de los procedimientos se hizo a partir de la escala compuesta por los valores Bien (**B**), Regular (**R**) y Mal (**M**).

En el anexo 21 se exponen los criterios valorativos que se utilizaron para medir la efectividad del dominio de los procedimientos para transferir entre representaciones analíticas y gráfica de las funciones cuadráticas.

La medición de la efectividad se realizó utilizando un índice (anexo 21.1) que se calculó de la forma siguiente:

- Para cada procedimiento se elaboró una matriz de valoración para la medición de la ejecución de cada paso (anexo 21).
- Se calculó un índice de la efectividad del dominio del procedimiento (anexo 21.1).
- Se construyó una escala utilizando el valor del índice de efectividad, cuyos valores se utilizaron en los criterios de valoración de la efectividad (anexo 22).

Puesto que la eficacia del dominio de un procedimiento es la constancia de la efectividad al variar la tarea y la situación de aprendizaje; para la evaluación de este indicador se aplicó el mismo procedimiento que para la efectividad, pero utilizando tareas evaluativas diferentes a las que los alumnos habían resuelto con anterioridad.

Los indicadores de la dimensión actuativa fueron medidos mediante una guía de observación (anexo 23) que el profesor utilizó durante la revisión de la respuesta a las tareas orientadas en los turnos de clases, así como tareas para estudios independientes y en la prueba que se aplicó para medir el desarrollo alcanzado para transferir entre representaciones analíticas y gráfica de funciones cuadráticas una vez recibido el contenido referente a estas funciones.

En el anexo 24 aparece la guía de observación que se utilizó para valorar la comunicación en el desempeño, de los alumnos y alumnas, ante las tareas de transferencia entre representaciones analíticas y gráficas de funciones cuadráticas, y en el anexo 25 se exponen los criterios valorativos que se utilizaron para medir las dimensiones comunicacional.

La planificación del pre-experimento, su relación con el programa de la asignatura y las tareas evaluativas.

Con el interés de asegurar la componente cognitiva del nivel de partida que se requería para que los estudiantes comprendieran los nuevos contenidos sobre funciones cuadráticas, el docente en los turnos de clases que antecedieron a los correspondientes a estas funciones, propuso una serie de tareas para repasar los contenidos que los estudiantes debían dominar.

Entre las tareas que el docente propuso a los estudiantes se encuentran las siguientes:

1. Desarrolla los siguientes productos notables:

a) $(x + 2)^2$ c) $(x + 3)(x – 3)$

b) $(x – 3)^2$ d) $(x + 2)(x – 5)$

2. Descompón en factores.

a) $x^2 + 5x + 4$ c) $x^2 + 7x$

b) $x^2 - 9$ d) $2x^2 - 5x -3$

3. Calcula el valor del discriminante en cada uno de los siguientes polinomios.

a) $x^2 + 9x + 4$ c) $x^2 + 7x$

b) $x^2 - 9$ d) $2x^2 - 5x -3$

4. Reduce términos semejantes.

a) $x^2 + 9x + 4 – 6x + 1$ c) $x^2 + 7x – 3x^2 + 8 – x$

b) $3 + x^2 – 9x +1 – 5x$ d) $2x^2 – 5x + 2x -3$

5. Calcula, en cada caso, el valor numérico de la expresión.

a) $\frac{3x^2-5x}{-x+12}$ para x = -1 c) $\frac{11-4x+x^2}{-3x+1}$ para x = 3

b) $\frac{(x^2+2)^2-5x}{-4+6x}$ para x = $\frac{1}{2}$ d) $\frac{3x^2-13x+4}{(x-4)^2}$ para x = -4

6. Ubica los siguientes pares ordenados en un mismo sistema de coordenadas rectangulares.

a) (-2; 0) c) (0; 4) e) (0; 0)

b) (2; -3) d) (-3; -1) f) (3; 3)

Como fue mencionado en la introducción de esta tesis, el profesor, con el objetivo de determinar el grado de dominio que tenían los estudiantes de los contenidos relacionados con las funciones, les aplicó a estos una prueba diagnóstica (anexo 1); la cual fue utilizada, unido con la caracterización que tenía de ellos, para dividir el grupo en tres estratos, formar los equipos correspondientes y orientar la tarea del estudio independiente de la primera clase.

El propósito que se perseguía con la realización, por parte de los estudiantes, de la tarea referida al estudio independiente orientado en la primera clase es que estos pudieran inducir las transformaciones que le ocurren al gráfico de la función cuadrática cuando varía alguno de los valores de los parámetros de la representación analítica canónica.

Durante el desarrollo de la primera clase que trata los contenidos de las funciones cuadráticas, el docente hizo énfasis en la curva que representaba gráficamente a las funciones cuadráticas. Pues hasta ese momento los estudiantes solo conocían, como gráfico de una función, un conjunto de puntos alineados.

En la segunda clase se revisa en el pizarrón, de forma colectiva, el estudio independiente orientado en la clase anterior. En este momento, el docente aprovecha para puntualizar los términos del lenguaje técnico que debe utilizarse para hacer referencia a las transformaciones que le ocurren al gráfico de las funciones cuadráticas cuando varía el valor de algún parámetro de su representación analítica.

En el desarrollo de esta clase, el docente trata los casos particulares que se describen en epígrafe 2.1.2., y resuelve algunos ejercicios que propone, a modo de ejemplos, en cada uno de estos casos.

Las restantes clases se imparten según la dosificación presentada en el epígrafe 2.1.2., y desarrolla en cada una de estas los ejercicios que se proponen en este mismo epígrafe.

Cuando fueron impartidas todas las clases referidas a las funciones cuadráticas, el docente realiza la prueba evaluativa prevista para aplicar en la última clase del estudio de estas funciones. En esta clase el docente, con la intención de no perder tiempo a la hora de copiar los ejercicios, les entregó a los alumnos una hoja con los ejercicios que se proponían impresos.

2.2.2. Resultados obtenidos en el pre-experimento según la operacionalización de la variable dependiente

En el momento de controlar, por parte del docente, la realización de la tarea orientada como estudio independiente de la primera clase se pudo precisar que el (90%) de los estudiantes pudo inducir las relaciones que existen entre el gráfico de las funciones y los parámetros de la representación analítica expresada en la forma canónica.

El principal problema que se evidenció durante la revisión de esta tarea fue con la utilización del lenguaje técnico de la asignatura, lo cual tuvo presente el docente cuando trató, en clases, los aspectos referidos a la transferencia entre representaciones analíticas y gráfica de funciones cuadráticas.

Cuando se realizaron los ejercicios propuestos por el docente para la formación y desarrollo de la habilidad para transferir entre representaciones analíticas y gráfica de funciones cuadráticas, en cada una de las clases, se presentaron algunas dificultades relacionadas, principalmente, con el cálculo; las cuales fueron especificadas y explicadas cuando fueron resueltos los ejercicios en el pizarrón.

Una vez recibido, por parte de los estudiantes, los contenidos referidos a las funciones cuadráticas, se pudo constatar que el (93,3%) de ellos lograron apropiarse del conocimiento de los pasos que componían los procedimientos de transferencia; el principal problema se manifestó en el procedimiento de transferencia de la representación analítica estándar a la representación a la representación canónica.

Por otra parte, se pudo apreciar que el (96,7%) consiguió dominar el orden de realización de esos pasos, aunque, durante las clases, tres estudiantes presentaron algunos problemas en este sentido los cuales fueron resueltos a medida que recibieron todos los turnos de clases referentes a las funciones cuadráticas. En el orden de los pasos del procedimiento fue, también, el procedimiento de transferencia de la representación analítica estándar a la representación canónica el que presentó mayores dificultades.

Con respecto a la realización de los pasos de los procedimientos de transferencias se puede decir que el (93,3%) de los estudiantes alcanzaron el objetivo en este sentido y los principales problemas que se presentaron fueron en algunos pasos de procedimientos y en los cálculos de estos pasos.

Relacionado con la coincidencia entre las representaciones dadas y las representaciones buscadas cuando los estudiantes transferían de una a otra, se confirmó que el (90%) de los estudiantes lograron una muy aceptada coincidencia y que los estudiantes que no lograron esa coincidencia fue producto, principalmente a errores particulares en la realización de los pasos de algunos procedimientos.

En la realización de tareas no similares a las resueltas con anterioridad pudo observarse que cinco de los alumnos presentaron dificultades a la hora de ejecutar dichas tareas por lo cual no lograron un nivel de efectividad aceptable, aunque, con algunos niveles de ayudas, pudieron mejorar esos resultados.

Sobre la explotación de los recursos y medios disponibles según las exigencias de las tareas se observó que el (76,7%) de los estudiantes lograron alcanzar un significativo desarrollo en este sentido a medida que fueron recibiendo los contenidos, lo cual les permitió obtener resultados (representaciones buscadas) correctos en los menores tiempos posibles; cinco estudiantes explotaron parcialmente los recursos y medios disponibles según las exigencias de las tareas de aprendizaje y solo dos estudiantes explotaron muy poco los recursos y medios con que disponían para realizar las tareas.

En las tablas 7, 8, 9, 10 y 11 que se muestran a continuación, se presentan, detalladamente, los resultados obtenidos en la medición de la efectividad de los procedimientos para transferir entre representaciones analíticas y gráficas de funciones cuadráticas.

La guía de observación (anexo 23) y la prueba aplicada por el docente en la última clase sobre las funciones cuadráticas, fueron los instrumentos que le permitieron al autor arribar a estos resultados.

Tabla 7: Comportamiento de los pasos que se deben realizar para transferir de la representación analítica expresada en la forma canónica a la representación gráfica, utilizando lápiz y papel.

Variables / **Categorías**	**ICV**		**DOP**		**RP**		**TG**	
	Cant.	**%**	**Cant.**	**%**	**Cant.**	**%**	**Cant.**	**%**
B	21	70,0	18	60,0	26	86,7	27	90,0
R	7	23,3	9	30,0	4	13,3	3	10,0
M	2	6,7	3	10,0	0	0,0	0	0,0
Total	30	100	30	100	30	100	30	100

Tabla 8: Comportamiento de los pasos que se deben realizar para transferir de la representación gráfica a la representación analítica expresada en la forma canónica, utilizando lápiz y papel.

Variables / Categorías	DVP		FE		RE		ERC	
	Cant.	**%**	**Cant.**	**%**	**Cant.**	**%**	**Cant.**	**%**
B	20	66,7	21	70,0	20	66,7	22	73,3
R	8	26,7	6	20,0	6	20,0	5	16,7
M	2	6,7	3	10,0	4	13,3	3	10,0
Total	30	100	30	100	30	100	30	100

Tabla 9: Comportamiento de los pasos que se deben realizar para transferir de la representación expresada un la en la forma estándar a la representación gráfica, utilizando lápiz y papel.

Variables / Categorías	DCV		DOPS		RP		TG	
	Cant.	**%**	**Cant.**	**%**	**Cant.**	**%**	**Cant.**	**%**
B	19	63,3	21	70,0	26	86,7	27	90,0
R	7	23,3	7	23,3	4	13,3	3	10,0
M	4	13,3	2	6,7	0	0,0	0	0,0
Total	30	100	30	100	30	100	30	100

Tabla 10: Comportamiento de los pasos que se deben realizar para transferir de la representación gráfica a la representación analítica expresada en la forma estándar, utilizando lápiz y papel.

Variables / Categorías	DVPC		FSEL		RSEL		ERE	
	Cant.	**%**	**Cant.**	**%**	**Cant.**	**%**	**Cant.**	**%**
B	24	80,0	18	60,0	17	56,7	23	76,7
R	5	16,7	9	30,0	9	30,0	4	13,3
M	1	3,3	3	10,0	4	13,3	3	10,0
Total	30	100	30	100	30	100	30	100

Tabla 11: Comportamiento de los pasos que se deben realizar para transferir de la representación analítica expresada en la forma estándar a

la expresada en la forma canónica y viceversa, utilizando lápiz y papel.								
Variables / **Categorías**	**CVP**		**ERC**		**CVPBC**		**ERE**	
	Cant.	**%**	**Cant.**	**%**	**Cant.**	**%**	**Cant.**	**%**
B	22	73,3	22	73,3	24	80,0	23	76,7
R	6	20,0	5	16,7	5	16,7	4	13,3
M	2	6,7	3	10,0	1	3,3	3	10,0
Total	30	100	30	100	30	100	30	100

Como se puede apreciar en la tabla 7, en el paso del procedimiento que se refiere a la identificación de las coordenadas del vértice, el (70%) de los estudiantes identifican las coordenadas sin presentar problemas; siete estudiantes las identifican pero se equivocan en el signo de alguna ordenada y dos estudiantes no logran identificar las coordenadas del vértice. Con respecto al segundo paso del procedimiento se puede observar que el (60%) de los estudiantes determinan los restantes puntos que faltan para representar la función; nueve estudiantes determinan los puntos que faltan pero cometen errores en los cálculos a la hora de hacerlo y tres estudiantes no determinan los puntos que faltan. En cuanto al tercer paso del procedimiento, el (86,7%) de los estudiantes representan correctamente, en el sistema de coordenadas rectangulares, todos los puntos obtenidos y cuatro estudiantes lo hacen bien en dos puntos y se equivocan en un tercero. Por último, en el paso que se refiere a trazar el gráfico de la función, el (90%) de los estudiantes trazan el gráfico de la función sin dificultades y dando a entender que el mismo se prolonga de manera ilimitada y el (10%) de los estudiantes trazan el gráfico solo hasta los puntos que determinaron y que tienen como abscisa el mayor y el menor valor.

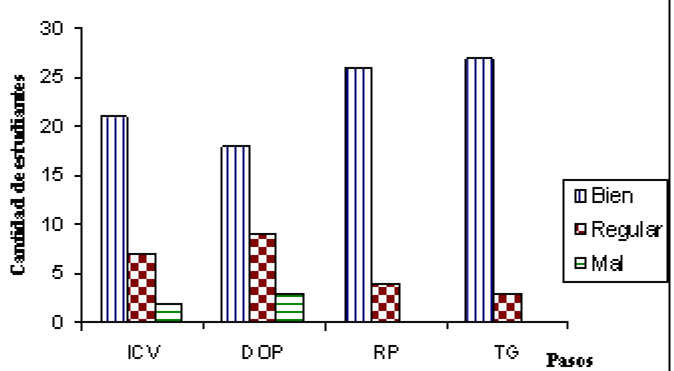
En la tabla 8 se puede apreciar que en el primer paso para realizar el procedimiento, el (66,7%) de los estudiantes determinan los valores de los parámetros **d** y **e** sin dificultad y las coordenadas de un punto por donde pasa el gráfico de la función; ocho estudiantes determinan los valores de estos parámetros y las coordenadas del punto por donde pasa el gráfico, pero se equivocan en el signo de alguno de ellos y dos estudiantes no determinan los valores de los parámetros ni las coordenadas del punto por donde el gráfico pasa o determina solo algunos de estos valores. En cuanto al segundo paso del procedimiento, se puede observar que el (70%) de los estudiantes forman la ecuación necesaria para determinar el valor del parámetro **a**; seis estudiantes forman la ecuación pero se equivocan a la hora de sustituir uno o dos valores y hay tres estudiantes que no forman la ecuación o se equivocan al sustituir todos los valores determinados o tres de ellos. En lo que respecta al tercer paso del procedimiento, el (66,7%) de los estudiantes resuelven la ecuación y determinan el valor del parámetro **a**; seis estudiantes resuelven la ecuación, pero se equivocan en algún cálculo y cuatro estudiantes no resuelven la ecuación. En el último paso del procedimiento, el (73,3%) de los estudiantes escriben la representación analítica de la función en la forma canónica; cinco estudiantes representan la función analíticamente en la forma canónica, pero se equivocan a la hora de ubicar dos de los tres parámetros y tres estudiantes no escriben la representación analítica o se equivocan al ubicar todos los parámetros de esta.

En la tabla 9 se puede apreciar que en el primer paso del procedimiento, el (63,3%) de los estudiantes determinan las coordenadas del vértice sin dificultades; siete estudiantes las determinan, pero se equivocan en algún cálculo al hacerlo y cuatro estudiantes no determinan las coordenadas del vértice. En relación al segundo paso se puede observar que el (70%) de los estudiantes determinan los restantes puntos que faltan para representar la función; siete estudiantes determinan los puntos que faltan, pero comenten errores en los cálculos a la hora de hacerlo y dos estudiantes no determinan los puntos que faltan. En cuanto al tercer paso del procedimiento, el (86,7%) de los estudiantes representan correctamente los puntos determinados, en el sistema de coordenadas y cuatro estudiantes lo hacen bien en dos puntos y se equivocan en un tercero. Por último, en el paso que se refiere a trazar el gráfico de la función, el (90%) de los estudiantes que trazan el gráfico de la función sin dificultades y dando a entender que el mismo se prolonga de manera ilimitada y tres estudiantes que trazan el gráfico solo hasta los puntos que tienen como abscisa el mayor y el menor valor.

En la tabla 10 se puede apreciar que en el primer paso del procedimiento, el (80%) de los estudiantes determinar el valor del parámetro **c** a partir del punto de intersección del gráfico con el eje de las ordenadas, y las coordenadas de dos puntos por donde el gráfico pasa; cinco estudiantes confunden el valor del parámetro **c** con uno de los ceros de la función y determinan bien las coordenadas de los dos puntos por donde pasa el gráfico de la función, o se equivocan en el signo de alguno de estos valores y un estudiantes no determina el valor del parámetro **c** ni los dos puntos por donde el gráfico pasa o solo determina algunos de estos valores. En cuanto al segundo paso del procedimiento, se puede observar que el (60%) de los estudiantes forman el sistema de ecuaciones necesario para determinar el valor del parámetro **a**; nueve estudiantes forman el sistema, pero se equivocan a la hora de sustituir uno o dos valores y hay tres estudiantes que no forman el sistema de ecuaciones o se equivocan al sustituir todos los valores determinados. En cuanto al tercer paso, el (56,7%) de los estudiantes resuelven el sistema de ecuaciones y determinan el valor del parámetro **a**; nueve estudiantes resuelven el sistema, pero se equivocan en algún cálculo y cuatro estudiantes no resuelven el sistema. Por último, en el cuarto paso, el (76,7%) de los estudiantes escriben la representación analítica de la función en la forma estándar; cuatro estudiantes representan la función analíticamente en la forma estándar, pero se equivocan a la hora de ubicar dos de los tres parámetros y tres estudiantes no escriben la representación analítica o se equivocan al ubicar todos los parámetros de esta.

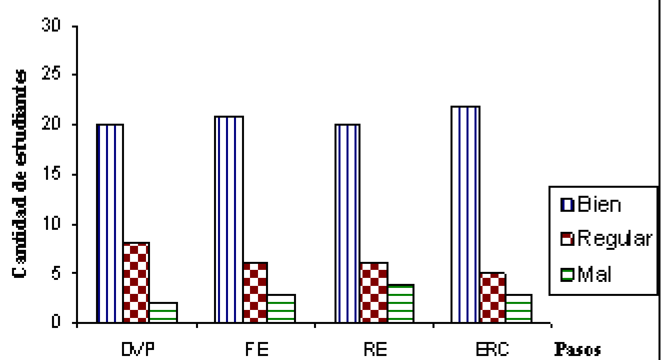
En la tabla 11 podemos observar que en el primer paso para transferir de la representación estándar a la canónica, el (73,3%) de los estudiantes calculan los valores de los parámetros **d** y **e** sin dificultad; seis estudiantes calculan los valores de los parámetros, pero cometen algún error de cálculo y dos estudiantes no calculan los valores. En cuanto al segundo paso, el (73,3%) de los estudiantes escriben la representación de la función en la forma canónica; cinco estudiantes escriben la ecuación, pero se equivocan al ubicar dos de los tres parámetros y tres estudiantes no escriben la representación analítica de la función o se equivocan al ubicar todos los parámetros. En lo que respecta al primer paso para transferir de la representación la canónica a la estándar, se puede observar que el (80%) de los estudiantes calculan los valores de los parámetros **b** y **c** sin error alguno; cinco estudiantes calculan los valores de los parámetros, pero se equivocan en algún cálculo y un estudiante no calcula los valores de los parámetros. Relacionado con el segundo paso, el (76,7%) de los estudiantes escriben la representación en la forma estándar; cuatro estudiantes representan en la forma estándar, pero se equivocan a la hora de ubicar dos de los tres parámetros y tres estudiantes no escriben la representación o se equivocan al ubicar todos los parámetros de esta.

En el siguiente gráfico se muestra la comparación que se puede realizar entre los estudiantes que se encuentran en la categoría de bien con los que están en las categorías de regular y mal según la realización de los pasos para ejecutar el procedimiento de transferencia de la representación analítica canónica a la representación gráfica, utilizando lápiz y papel.



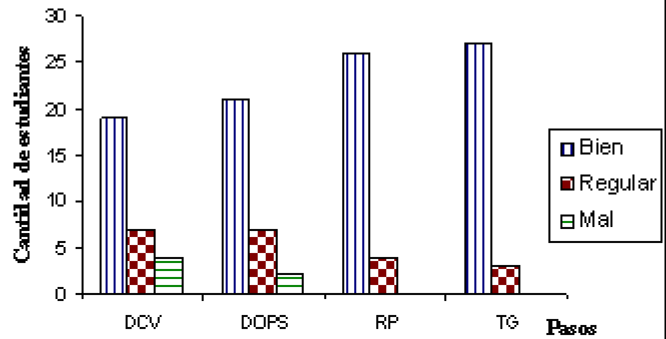
Categoría alcanzada por los estudiantes en los pasos para ejecutar el procedimiento de transferencia de la representación analítica canónica a la representación gráfica de la función cuadrática.

En el gráfico que aparece a continuación se muestra la comparación que se puede realizar entre los estudiantes que se encuentran en la categoría de bien con los que están en las categorías de regular y mal según la realización de los pasos para ejecutar el procedimiento de transferencia de la representación gráfica a la representación analítica canónica, utilizando lápiz y papel.



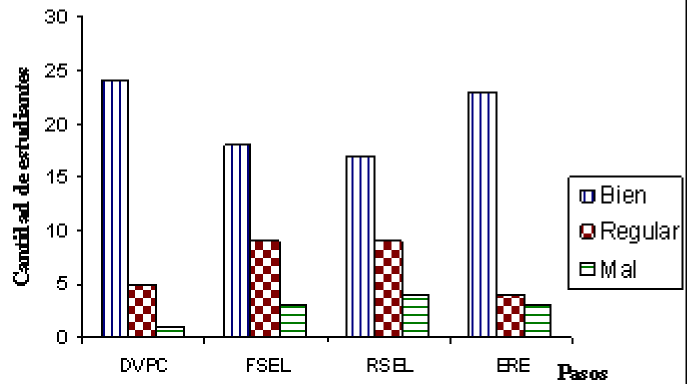
Categoría alcanzada por los estudiantes en los pasos para ejecutar el procedimiento de transferencia de la representación gráfica a la representación analítica canónica de la función cuadrática.

Seguidamente aparece el gráfico que muestra la comparación que se puede realizar entre los estudiantes que se encuentran en la categoría de bien con los que están en las categorías de regular y mal según la realización de los pasos para ejecutar el procedimiento de transferencia de la representación analítica estándar a la representación gráfica, utilizando lápiz y papel.



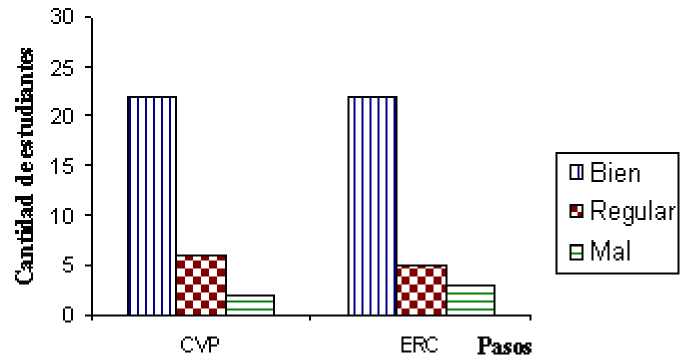
Categoría alcanzada por los estudiantes en los pasos para ejecutar el procedimiento de transferencia de la representación analítica estándar a la representación gráfica de la función cuadrática.

En el siguiente gráfico se muestra la comparación que se puede realizar entre los estudiantes que se encuentran en la categoría de bien con los que están en las categorías de regular y mal según la realización de los pasos para ejecutar el procedimiento de transferencia de la representación gráfica a la representación analítica estándar, utilizando lápiz y papel.



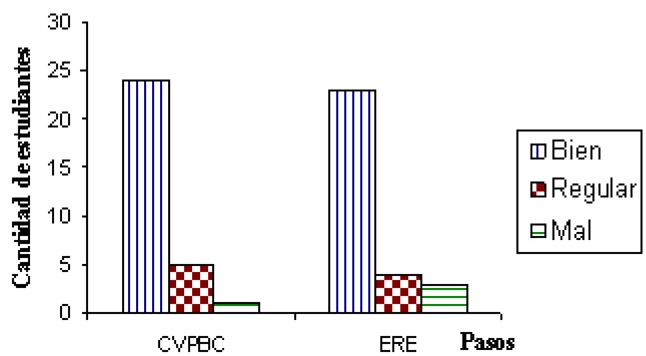
Categoría alcanzada por los estudiantes en los pasos para ejecutar el procedimiento de transferencia de la representación gráfica a la representación analítica estándar de la función cuadrática.

En el gráfico que aparece a continuación se muestra la comparación que se puede realizar entre los estudiantes que se encuentran en la categoría de bien con los que están en las categorías de regular y mal según la realización de los pasos para ejecutar el procedimiento de transferencia de la representación analítica estándar a la representación analítica canónica, utilizando lápiz y papel.



Categoría alcanzada por los estudiantes en los pasos para ejecutar el procedimiento de transferencia de la representación analítica estándar a la representación analítica canónica de la función cuadrática.

Seguidamente aparece el gráfico que muestra la comparación que se puede realizar entre los estudiantes que se encuentran en la categoría de bien con los que están en las categorías de regular y mal según la realización de los pasos para ejecutar el procedimiento de transferencia de la representación analítica canónica a la representación analítica estándar, utilizando lápiz y papel.



Categoría alcanzada por los estudiantes en los pasos para ejecutar el procedimiento de transferencia de la representación analítica canónica a la representación analítica estándar de la función cuadrática.

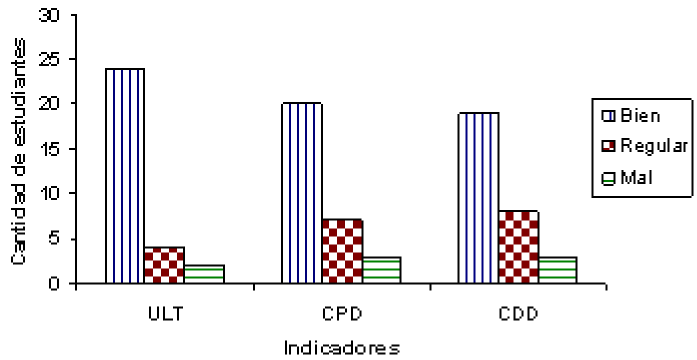
En la tabla 12 que se muestran a continuación se presentan los resultados obtenidos por indicadores de la dimensión comunicacional a partir de la guía de observación aplicada (anexo 24).

Tabla 12: Comportamiento de los indicadores de la dimensión comunicacional según la guía de observación (anexo 24).

Variables / Categorías	ULT		CPD		CDD	
	Cant.	**%**	**Cant.**	**%**	**Cant.**	**%**
B	24	80	20	66,7	19	63,3
R	4	13,3	7	23,3	8	26,7
M	2	6,7	3	10,0	3	10,0
Total	30	100	30	100	30	100

Como puede observarse, en la tabla 12, el (93,3%) de los estudiantes se encuentran en la categoría de bien y regular en el indicador que se refiere a la utilización del lenguaje técnico de la asignatura. Así mismo el (90%) de los estudiantes están en la categoría de bien y regular en los indicadores que se refiere a la crítica ante sus propias dificultades y la crítica ante las dificultades de los demás a la hora de transferir entre representaciones analíticas y gráficas de funciones cuadráticas.

En el siguiente gráfico se muestra la comparación que se puede realizar entre los estudiantes que se encuentran en la categoría de bien con los que están en las categorías de regular y mal en la dimensión comunicacional.



Categorías alcanzadas por los estudiantes en los indicadores de la dimensión comunicacional.

CONCLUSIONES GENERALES

En el proceso de investigación llevado a cabo, se ha abordado un problema de gran significación dentro del PEA de la Matemática en el preuniversitario.

Los métodos de investigación utilizados por el autor de la presente tesis permitieron conocer lo siguiente:

- Para formar y desarrollar un concepto es necesario ampliar el número de sistemas donde estos pueden ser representados, así como transferir de un sistema a otro.
- Existen dificultades de aprendizaje, por parte de los estudiantes, relacionadas con la transferencia entre representaciones analíticas y gráfica de funciones cuadráticas.
- A pesar de que los profesores conocen las posibilidades que brinda el ordenador, como medio, para que los estudiantes comprendan las transformaciones que le ocurren al gráfico de las funciones cuando varía alguno de los parámetros de una representación analítica; estos no saben cómo utilizarlo.
- En el PEA de las funciones cuadráticas se hace poco énfasis en la transferencia entre las representaciones analíticas de estas funciones, así como en la transferencia de la representación gráfica a sus representaciones analíticas.
- La representación analítica de una función cuadrática, expresada en la forma canónica, permite inferir un mayor número de propiedades y características del gráfico que otras de las formas de este tipo de representación.
- En el PEA de la Matemática se excluye el uso de la representación analítica multiplicativa siendo esta necesaria para desarrollar, a un nivel mayor, el concepto de función cuadrática.

- Un ordenamiento del contenido que trata las funciones cuadráticas, una dosificación de este contenido, inclusión de nuevos procedimientos de transferencia entre representaciones de funciones cuadráticas y algunos cambios en la dinámica de algunas funciones didácticas permitieron formar y desarrollar la habilidad para transferir entre representaciones analíticas y gráfica de funciones cuadráticas.
- En el pre-experimento realizado quedó demostrado que a la implementación de la alternativa concebida, está asociada la formación y desarrollo de la habilidad para transferir entre representaciones analíticas y gráfica de funciones cuadráticas en los alumnos y alumnas que conformaron la muestra.

RECOMENDACIONES

Teniendo en cuenta lo expuesto en la presenta tesis, el autor considera oportuno hacer las recomendaciones siguientes:

- Aplicar de forma consciente la Alternativa Didáctica elaborada en los grupos de décimo grado del IPVCE “Eusebio Olivera Rodríguez”.
- Utilizar las potencialidades del ordenador para formar y desarrollar la habilidad para transferir entre representaciones de funciones cuadráticas y específicamente algún software como el Derive que permita transferir entre representaciones analíticas de estas funciones.
- Implementar el estudio de la representación analítica multiplicativa de la función cuadrática en el programa de Matemática para este nivel.
- Poner a disposición de todos los docentes del IPVCE “Eusebio Olivera Rodríguez” un documento que contenga la Alternativa Didáctica elaborada, así como los resultados que se obtuvieron cuando fue implementada.

BIBLIOGRAFÍA Y REFERENCIAS

1. Addine, F. (2005). *El registro de sistematización profesional: Herramienta para la toma de decisiones*. CEE ISP “Enrique José Varona”.
2. Alonso, I. (2001). *La resolución de problemas matemáticos. Una alternativa didáctica centrada en la representación*. Tesis presentada en opción al grado de Doctor en Ciencias Pedagógicas. No publicada. Santiago de Cuba. Cuba.
3. Álvarez, C. (sf). *Metodología de la investigación científica* [versión electrónica]. Centro de Estudios de Educación Superior “Manuel Gran”. Santiago de Cuba.
4. Arencibia, V., García, L., & Escalona, E. (2005). La investigación educativa como sustento de las transformaciones educacionales. En Ministerio de Educación (Ed.), VI Seminario Nacional para Educadores (pp. 2-4). La Habana: Pueblo y Educación.
5. Arteaga, E. (2000). *El sistema de tareas para el trabajo independiente creativo de los alumnos en la enseñanza de la Matemática en el nivel medio superior*. Tesis presentada en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas. No publicada. Instituto Superior Pedagógico “Conrado Benítez García”. Cienfuegos. Cuba.
6. Ballester, S. y otros (1992). *Metodología de la enseñanza de la Matemática, tomo I*. La Habana: Pueblo y Educación.
7. Ballester, S. y otros (2000). *Metodología de la enseñanza de la Matemática, tomo II*. La Habana: Pueblo y Educación.
8. Ballester, S. y otros (2002). *El transcurso de las líneas directrices en los programas de Matemática y la planificación de la enseñanza*. La Habana: Pueblo y Educación.
9. Barreto, I. & Labañino, C. (2005). Los medios audiovisuales e informáticos en el contexto de las transformaciones educacionales. En Ministerio de Educación (Ed.), *VI Seminario Nacional para Educadores* (pp. 12-14). La Habana: Pueblo y Educación.
10. Beltrán, J. (1998). *Procesos, estrategias y técnicas de aprendizaje. Madrid*: Síntesis.
11. Bermúdez, R. & Pérez, L. M. (sf). La teoría histórico-cultural de L. S. Vigotsky. Algunas ideas básicas acerca de la educación y el desarrollo psíquico [versión electrónica]. La Habana. Cuba.
12. Blázquez, S. & Ortega, T. (2001). *Los sistemas de representación en la enseñanza del límite*. Relime, 4 (3), 219-236. México.
13. Borges, A. (2006). Diseños de investigación en psicología. Curso para la formación de psicólogos. Recuperado de http://webpages.ull.es/users/aborges
14. Bosch, M. & Gascón, J. (2001). Las prácticas docentes del profesor de matemáticas. Barcelona. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino

15. Bosch, M. (2000). Un punto de vista antropológico: la evolución de los "instrumentos de representación" en la actividad matemática. En L. C. Contreras, J. Carrillo, N. Climent & M. Sierra (Eds.), Actas del Cuarto Simposio de la Sociedad Española de investigación en Educación Matemática (pp. 15-28). Huelva. España. Recuperado el 19 de junio de 2006, en http://www.ugr.es/local/seiem/IV_Simposio.htm
16. Campistrous, L. & Rizo, C. (2001). *Sobre las hipótesis y las preguntas científicas en los trabajos de investigación*, en Revista Desafía Escolar, año 5, segunda Edición Especial, pp. 3-7.
17. Campistrous, L. y otros (1989). *Matemática décimo grado*. La Habana: Pueblo y Educación.
18. Campistrous, L. y otros (1989). *Orientaciones Metodológicas*. Décimo grado. La Habana. Editorial Pueblo y Educación.
19. Campistrous, L. y otros (1990). *Matemática onceno grado*. La Habana: Pueblo y Educación.
20. Campistrous, L. y otros (1990). *Orientaciones Metodológicas*. Onceno grado. La Habana. Editorial Pueblo y Educación.
21. Campistrous, L., Rivero, H., Durán, A. & Sandoval, A. (1991). *Matemática duodécimo grado*. Tomo I. La Habana: Pueblo y Educación.
22. Canfux, V. (1996). *La pedagogía tradicional*. Tendencias pedagógicas contemporáneas. Departamento de Psicología y Pedagogía. Universidad de la Habana. [versión electrónica]
23. Cañizares, E. D. (2005). *Alternativa didáctica dirigida a integrar el concepto de función lineal con el de movimiento, en décimo grado*. Trabajo de diploma en opción al título de Licenciado en Educación, carrera Matemática-Computación. No publicado. Sancti Spíritus.
24. Castro, E. & Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico (Ed.), La educación matemática en la enseñanza secundaria (95-124). Barcelona: Horsori.
25. Castro, W. & Pardo, H (1998). El computador en la clase de matemáticas. Un enfoque semiótico. Departamento de Ciencias Básicas. Pontificia Universidad Javeriana-Cali, Colombia. Recuperado el 15 de noviembre de 2008, en *http://www.iberomat.uji.es/carpeta/comunicaciones/82_fernando_castro.doc*
26. CCIP (sf). *Aproximación al estudio de la metodología como resultado científico*. No publicado. Santa Clara. ISP Félix Varela.
27. Cerezal, J. & Fiallo, J. (2001). *Los métodos teóricos en la Investigación Pedagógica*, en Revista Desafía Escolar, año 5, segunda Edición Especial, pp. 22-33.
28. Cerezal, J., Fiallo, J., Ramírez, L. A., Valledor, R. & Ruiz, A. (2006). *Material básico. Metodología de la investigación y Calidad de la Educación*. En Maestría

en Ciencias de la Educación. Fundamentos de las Ciencias de la Educación. Módulo II. Primera parte. La Habana: Pueblo y Educación.

29. Chávez, J. & Escribano, E. (2005). El pensamiento pedagógico de José Martí y Pérez. En Ministerio de Educación (Ed.), *VI Seminario Nacional para Educadores* (p. 9). La Habana: Pueblo y Educación.
30. Chávez, J., Permuy, L. D. & Suárez, A. (2004). *Las corrientes y tendencias de la pedagogía en el siglo XX* [versión electrónica]. Maestría en ciencias de la educación. Módulo I. IPLAC. La Habana.
31. Contreras, A. & Font, V. (2002). ¿Se aprende por medio de los cambios entre los sistemas de representación semiótica? Castellón. Recuperado de http://www-didactique.imag.fr
32. Corral, R. (1996). *La pedagogía cognoscitiva*. Tendencias pedagógicas contemporáneas. Departamento de Psicología y Pedagogía. Universidad de la Habana. [versión electrónica]
33. Cortese, A. (sfa). El aprendizaje. En Enciclopedia de desarrollo personal (vol. 1, pp. 159-168) [versión electrónica].
34. Cortese, A. (sfa). La visualización. En Enciclopedia de desarrollo personal (vol. 1, pp. 251-268) [versión electrónica].
35. Cuadrado, Z., Naredo, R. & Rizo, C. (1991). *Matemática duodécimo grado*. Parte II. La Habana: Pueblo y Educación.
36. Ferrer, M. & Moreno, M. J. (2005). La gestión de la información en la profesionalización y la investigación educativa. En Ministerio de Educación (Ed.), *VI Seminario Nacional para Educadores* (pp. 14-15). La Habana: Pueblo y Educación.
37. Flores, P. (1996). Evaluación del Profesor de Matemáticas. España. http://ochoa.mat.ucm.es/~guzman
38. Font, V. (2000). *Representaciones ostensivas activadas en prácticas de justificación en instituciones escolares de enseñanza secundaria*. La Lettre de la Preuve, 1-21. Francia. Recuperado de http://www-didactique.imag.fr
39. Font, V. (2001a). *Expresiones simbólicas a partir de gráficas. El caso de la parábola*. EMA, 6 (1), 180-200. Colombia.
40. Font, V. (2001b). *Algunos puntos de vista sobre las representaciones en didáctica de las matemáticas*. Philosophy of Mathematics Education Journal, 14, 1-35. Recuperado de *http://www/*vfont@d5.ub.es
41. Font, V. (2005). *Las representaciones en Educación Matemática*. Presentación electrónica para uso del doctorado en Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Granada. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/
42. García, G. & Addine, F. (2005). *La tarea integradora: Eje integrador interdisciplinario*. En Ministerio de Educación (Ed.), *VI Seminario Nacional para Educadores* (pp. 15-16). La Habana: Pueblo y Educación.

43. García, G., Granados, L. A. & Addine, F. (2005). Identificación de problemas de investigación a diferentes niveles de educación. En Ministerio de Educación (Ed.), *VI Seminario Nacional para Educadores* (pp. 4-5). La Habana: Pueblo y Educación.

44. Gascón, J. & Fonseca, C. (2000). Reconstrucción de una organización matemática alrededor del estudio de la representación gráfica de funciones elementales. España. (recuperable en Internet).

45. Godino, J. D. & Batanero, M. C. (1998). Funciones semióticas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En, *IX Seminario de Investigación en Educación Matemática*. Guimaraes. Portugal. Recuperado de *http://www.sectormatematica.cl/articulo.htm*

46. Godino, J. D. (1993). *Paradigmas, problemas y metodologías en didáctica de la Matemática*. *Quadrante, 2(1), 9-22.*

47. Godino, J. D., Bencomo, M., Font, V. & Wilhelmi, M. (2006). *Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas*. Recuperado de *http://www.ugr.es/~jgodino*

48. Gómez, L. I. (2000). *Carta metodológica 1/2000*. Ministerio de Educación de Cuba. La Habana.

49. Gómez, M. A. (2005). *Una propuesta didáctica para elevar los niveles de transferencia entre las distintas representaciones de las funciones, en el nivel preuniversitario*. Tesis presentada en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas. No publicada. Universidad de La Habana. La Habana. Cuba.

50. Gómez, P. & Rico, L. (2002). *Análisis didáctico, conocimiento didáctico y formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Recuperado de *http://cumbia.ath.cx/lr.htm*

51. Gómez, P. (2006). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Tesis presentada en opción al grado científico de Doctor en Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Granada. España.

52. González, O. (1996). *El enfoque histórico-cultural como fundamento de una concepción pedagógica*. Tendencias pedagógicas contemporáneas. Departamento de Psicología y Pedagogía. Universidad de la Habana. [versión electrónica]

53. González, O. (1996). *El sistema de instrucción personalizada*. Tendencias pedagógicas contemporáneas. Departamento de Psicología y Pedagogía. Universidad de la Habana. [versión electrónica]

54. Griffiths, A. (2000, enero-abril). *Las matemáticas ante el cambio de milenio*. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, *3(1)*, 23-41. Recuperado de *http://ochoa.mat.ucm.es/~guzman/*

55. Grünberg, J. A. & Olmedo, A (1991). *Profesores y computadores: una*

investigación sobre los factores que afectan el uso de computadores en colegios secundarios. Uruguay

56. Herrera, J. (2008). ¿Cómo enseñar Matemáticas con ayuda del ordenador? Instituto Superior Pedagógico "Conrado Benítez García". Cienfuegos. Cuba. Recuperado el 28 de diciembre de 2008, en *http://www.monografias.com/trabajos21/matematicas-con-ordenador/matematicas-con-ordenador.shtml*

57. Hitt, F. (2001). El papel de los esquemas, las conexiones y las representaciones internas y externas dentro de un proyecto de investigación en Educación Matemática. En P. Gómez & L. Rico (Eds.), *Iniciación a la Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje al Profesor Mauricio Castro* (pp. 165-178). Granada: Editorial Universidad de Granada. Recuperado de *http://cumbia.ath.cx/ugr/phmc/PDF/Hitt.pdf*

58. Instituto Nacional de Evaluación y Calidad del Sistema Educativo de España (2003). *Marcos teóricos de PISA 2003. Conocimientos y destrezas en matemáticas, lectura, ciencias y solución de problemas*. Recuperado de *http://www.ince.mec.es/diag/mat16.htm*

59. Instituto Pedagógico Latinoamericano y Caribeño (1997). Programa del curso: Modelo pedagógico para la formación y desarrollo de habilidades, hábitos y capacidades. [versión electrónica]

60. Jungk, W. (1978). *Conferencias sobre Metodología de la Enseñanza de la Matemática 1.* La Habana: Pueblo y Educación.

61. Jungk, W. (1979). *Conferencias sobre Metodología de la Enseñanza de la Matemática 2*. *Primera parte*. La Habana: Pueblo y Educación.

62. Jungk, W. (1981). *Conferencias sobre Metodología de la Enseñanza de la Matemática 2. Segunda Parte*. La Habana: Pueblo y Educación.

63. Kaput, J. J. (1992). Technology and Mathematics Education. En Grouws, D. A. (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. (pp. 515-556). New York: Macmillan.

64. Labañino, C. (2006). *Material básico. El software educativo*. En, Maestría en Ciencias de la Educación. Fundamentos de la Investigación Educativa. Módulo II. Segunda parte. La Habana: Pueblo y Educación.

65. Leyva, N & Castro, N. V. (2008). La estimulación de los procedimientos lógicos que se emplean a la forma lógica del pensamiento. Recuperado el 20 de diciembre de 2008, en *http://www.monografias.com/trabajos55/estimular-logica/estimular-logica2.shtml*

66. Lorences, J. (sf). *Aproximación al sistema como resultado científico*. No publicado. Santa Clara. ISP Félix Varela: Centro de Ciencias e Investigaciones Pedagógicas.

67. Lupiañez, J. L. (2000). *Capítulo 4. Sistema de Representación. Representaciones Ejecutables*. Recuperado el 26 de octubre de 2008, en

http://cumbia.ath.cx:591/pna/Archivos/LupiannezJ00-2705.pdf

68. Marimón, J. A. (2004). *Aproximación al estudio del modelo como resultado científico*. No publicado. Santa Clara. ISP Félix Varela: Centro de Ciencias e Investigaciones Pedagógicas.
69. Marquès, P. (2007). *Medios didácticos y recursos educativos*. Barcelona. Recuperado de *http://dewey.uab.es/pmarques*
70. Martínez, M., Miranda, T. & Egea, M. (2005). La filosofía Marxista-Leninista: Fundamento de nuestra obra pedagógica. En Ministerio de Educación (Ed.), *VI Seminario Nacional para Educadores* (pp. 5-8). La Habana: Pueblo y Educación.
71. Martínez. M. (2003). *Concepciones sobre la enseñanza de la resta: un estudio en el ámbito de la formación permanente del profesorado*. Tesis presentada en opción al grado científico de Doctor en Didáctica de la Matemática y Ciencias Experimentales. Universidad de Barcelona. Barcelona. España. Recuperado de *http://www.tdx.cbuc.es/TESIS_UAB/AVAILABLE/TDX-0611104-162344//mms1de3.pdf*
72. Ministerio de Educación de Cuba (1989). *Programa de Matemática Décimo Grado* [versión electrónica]. La Habana: Pueblo y Educación.
73. Ministerio de Educación de Cuba (2004a). *Programa de Matemática. Décimo grado* [versión electrónica]. La Habana.
74. Ministerio de Educación de Cuba (2004b). *Programa de Matemática. Onceno grado* [versión electrónica]. La Habana.
75. Ministerio de Educación de Cuba (2004c). *Programa de Matemática*. *Duodécimo grado* [versión electrónica]. La Habana.
76. Ministerio de Educación de Cuba (2004d). *Video-clases. Matemática décimo grado*. *Clases 81-82-83*. Departamento de Medios de Enseñanza. Instituto Preuniversitario Vocacional de Ciencias Exactas. Sancti Spíritus. Cuba.
77. Ministerio de Educación de Cuba (2004e). *Video-clases. Matemática décimo grado*. *Clases 84-85-86*. Departamento de Medios de Enseñanza. Instituto Preuniversitario Vocacional de Ciencias Exactas. Sancti Spíritus. Cuba.
78. Ministerio de Educación de Cuba (2004f). *Video-clases. Matemática décimo grado*. *Clases 87-88-90*. Departamento de Medios de Enseñanza. Instituto Preuniversitario Vocacional de Ciencias Exactas. Sancti Spíritus. Cuba.
79. Ministerio de Educación de Cuba (2004g). *Video-clases. Matemática décimo grado*. *Clases 91-92-94*. Departamento de Medios de Enseñanza. Instituto Preuniversitario Vocacional de Ciencias Exactas. Sancti Spíritus. Cuba.
80. Ministerio de Educación de Cuba (2004h). *Guía de las clases de video y de las teleclases* [versión electrónica]. No publicado. La Habana.
81. Ministerio de Educación de Cuba (2004i). *Guía para el profesor. TV Educativa*. La Habana: Pueblo y Educación.
82. Ministerio de Educación de Cuba (2004j). *Programa de Matemática de octavo*

grado. En, *Programas de octavo grado. Secundaria básica* (pp. 2-37). La Habana: Pueblo y Educación.

83. Ministerio de Educación de Cuba (2004k). *Programa de Matemática de noveno grado*. En, *Programas de noveno grado. Secundaria básica* (pp. 2-35). La Habana: Pueblo y Educación.
84. Ministerio de Educación de Cuba (2004l). *Orientaciones para llenar la "guía de observación de las clases de video y de las teleclases* [versión electrónica]. No publicado. La Habana.
85. Ministerio de Educación de Cuba (2005a). *Programas Décimo grado de la Educación Preuniversitaria y primer año de la Educación Técnica y Profesional* [versión electrónica]. La Habana.
86. Ministerio de Educación de Cuba (2005b). *Programa de Matemática undécimo grado y segundo año de la ETP* [versión electrónica]. La Habana.
87. Ministerio de Educación de Cuba (2005c). *Programas de Matemática duodécimo grado* [versión electrónica]. La Habana.
88. Ministerio de Educación de Cuba (2006). *Estrategia para la enseñanza – aprendizaje de la asignatura Matemática* [versión electrónica]. La Habana.
89. Mora, N. (2008). *Desempeño de los alumnos del primer semestre del Curso de Superación Integral para Jóvenes ante los errores cognitivos al resolver ecuaciones lineales*. Tesis en opción al título de Master en Ciencias de la Educación. ISP Capitán "Silverio Blanco Núñez". Sancti Spíritus. Cuba
90. Muñoz, F. y otros (1991). *Matemática noveno grado*. La Habana: Pueblo y Educación.
91. Muñoz, F., Agüero, J., López, E., Guerra, M. & Marrero, J. G. (1989). *Matemática. Séptimo grado*. La Habana: Pueblo y Educación.
92. Muñoz, F., Agüero, J., Montes de Oca, E., Arias, D. & López, E. (1990). *Matemática octavo grado*. La Habana: Pueblo y Educación.
93. National Academy Press (2002). *¿Cómo aprende la gente?: cerebro, mente, experiencia, y escuela. Capítulo I*. (T. Nelson Oviedo, trad.). Recuperado el 24 de junio de 2004, en *http://www.eduteka.org/*
94. Negrón, C. y otros (2004). El uso del programa Cabri Geometre en la enseñanza del Análisis Matemático. [versión electrónica]. No publicado. Instituto Superior Pedagógico "José de la Luz y Caballero". Holguín.
95. Nogales, F. V. (2003). Estrategias Educativas. *Quaderns Digitals*. Centre d'Estudis Vall de Segó. Valencia. España. Recuperado el 5 de julio de 2006, en *http://www.quadernsdigitals.net/*
96. Ojalvo, V. & Castellanos, A. V. (1996). *Pedagogía autogestionaria*. Tendencias pedagógicas contemporáneas. Departamento de Psicología y Pedagogía. Universidad de la Habana. [versión electrónica]
97. Ossa, M. (2003). Pautas para citar textos y hacer listas de referencias según las

normas de la American Psychological Association. *EMA*, *8 (3)*, 335-349. Colombia.

98. Pérez, E. L. (2003). *La comunicación matemática, una alternativa metodológica para potenciar su desarrollo mediante la geometría analítica*. Tesis en opción al título de Máster en Didáctica de la Matemática. ISP "José de la Luz y Caballero". Holguín.
99. Pérez, G., García, G., Nocedo, I. & García, M. L. (1996). *Metodología de la investigación educacional. Tomo I*. La Habana: Pueblo y Educación.
100. Quero, O. N. y Ruiz, A. M. (2009). *La directriz Patrones y Funciones en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en la Educación Preuniversitaria. Ejemplos de tareas de aprendizaje*. Material elaborado por encargo de la Comisión Nacional de Matemática del MINED. ISP "Silverio Blanco Núñez". Sancti Spíritus.
101. Real Academia Española (2006). Alternativa. En, *Diccionario de la Lengua Española. Vigésima segunda edición*. Recuperado el 8 de marzo de 2006, en *http://www.rae.es/*
102. Real Academia Española (2006). Didáctica. En, *Diccionario de la Lengua Española. Vigésima segunda edición*. Recuperado el 8 de marzo de 2006, en *http://www.rae.es/*
103. Real Academia Española (2006). Representación. En, *Diccionario de la Lengua Española. Vigésima segunda edición*. Recuperado el 8 de marzo de 2006, en *http://www.rae.es/*
104. Real Academia Española (2006). Representar. En, *Diccionario de la Lengua Española. Vigésima segunda edición*. Recuperado el 8 de marzo de 2006, en *http://www.rae.es/*
105. Real Academia Española (2006). Transferencia. En, *Diccionario de la Lengua Española. Vigésima segunda edición*. Recuperado el 8 de marzo de 2006, en *http://www.rae.es/*
106. Rico, L., Castro, E. & Romero, I. (1997). *Sistemas de representación y aprendizaje de estructuras numéricas*. ISSN 0212-4521, Vol. 15, Nº 3, 1997, pp. 361-372 Recuperado de *http://www.ugr.es/~dpto_did/*
107. Robarlo, T. S. (1996). *Jean Piaget y la pedagogía operatoria*. Tendencias pedagógicas contemporáneas. Departamento de Psicología y Pedagogía. Universidad de la Habana. [versión electrónica]
108. Rodríguez, A. G. & Sanz, T. (1996). *La escuela nueva*. Tendencias pedagógicas contemporáneas. Departamento de Psicología y Pedagogía. Universidad de la Habana. [versión electrónica]
109. Rojas, A. R. & Corral, R. (1996). *La tecnología educativa*. Tendencias pedagógicas contemporáneas. Departamento de Psicología y Pedagogía. Universidad de la Habana. [versión electrónica]

110.Ruiz, A. M. (2008). *El experimento pedagógico en la Maestría en Ciencias de la Educación de Amplio Acceso*. Centro de Estudios Pedagógicos y de Calidad de la Educación. ISP "Silverio Blanco Núñez". Sancti Spíritus.

111.Ruiz, A. M. (2009). *El concepto de habilidad para transferir entre representaciones analíticas y gráfica de funciones cuadráticas*. Centro de Estudios Pedagógicos y de Calidad de la Educación. ISP "Silverio Blanco Núñez". Sancti Spíritus.

112.Ruiz, A. M., Cañizares, E. D. & Solano, L. (2005). La integración del concepto de función lineal con el concepto de movimiento en el preuniversitario: aspiración y realidad. *Revista Pedagogía y Sociedad*. Sancti Spíritus, Cuba. ISSN 1608-3784, Vol. 6, Nº 13, 2005

113.Ruiz, A. M. (2002). *La etapa de la formación de un concepto matemático en el proceso pedagógico*, presentado para su publicación en la Revista Pedagogía y Sociedad. Sancti Spíritus, Cuba.

114.Ruiz, A. M. (2003). *Procedimiento didáctico para el diseño de la integración de conocimientos matemáticos en décimo grado*. Tesis en opción al título de Master en Didáctica de la Matemática. No publicada. ISP "José de la Luz y Caballero". Holguín. Cuba.

115.Sánchez, J. (1998). Aprender Interactivamente con los Computadores. Departamento de Ciencias de la Computación. Universidad de Chile. Recuperado el 15 de noviembre de 2008, en *http://www.dcc.uchile.cl/~jsanchez/Pages/papers/aprenderinteractivamente.pdf*

116.Sastre, P., Boubée, C., Rey, G. & Orenzi, O. (2008). *La comprensión: proceso lingüístico y matemático*, en Revista Iberoamericana de Educación ISSN: 1681-5653 n.° 46/8 - 15 de agosto de 2008: Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura (OEI). Recuperado el 25 de octubre de 2008, en *http://www.rieoei.org/deloslectores/2219Sastre.pdf*

117.Sierra, R. A. (2002). Modelación y estrategia: algunas consideraciones desde una perspectiva pedagógica. En G. García Batista (Ed.), *compendio de pedagogía* (pp. 311- 328). La Habana: Pueblo y Educación.

118.Silvestre, M. & Rizo, C. (2001). Aprendizaje y diagnóstico. En, *Seminario Nacional para el Personal Docente* (pp. 2-5). La Habana: Pueblo y Educación.

119.Solano, L. (2004). *Diseño y valoración de una alternativa didáctica para el mejoramiento del aprendizaje de los conocimientos básicos del Cálculo Diferencial mediante el uso del ordenador*. Tesis en opción al título de Master en Didáctica de la Matemática. ISP "José de la Luz y Caballero". Holguín.

120.Terrazas, S. M. (1998). Matemáticas en movimiento. Instituto de Ingeniería y Tecnología. Departamento de Ciencias Básicas. Universidad Autónoma de Ciudad Juárez. Recuperado de Internet el 25 de enero de 2010, en *http://www.monografias.com/trabajos32/matematica-en-movimiento/matematica-en-movimiento.shtml*

121.Ursini, S. (2002). *Un proyecto de uso de tecnología para la enseñanza de las matemáticas.* Ponencia elaborada para su presentación en las XIX Jornadas del SI-IDM del 3 al 6 de abril Córdoba, España. México. Recuperado el 15 de noviembre de 2008, en *www.ugr.es/~jgodino/siidm/cordoba_2003/sursini.doc*

122.Valdés, H. & Torres, P. (2005). El diagnóstico pedagógico y la evaluación de la calidad de la educación. En Ministerio de Educación (Ed.), *VI Seminario Nacional para Educadores* (pp. 9-11). La Habana: Pueblo y Educación.

123.Vázquez, E. (2008). *Preparación de los profesores en formación en la dirección del aprendizaje de la resolución de problemas matemáticamente modelables*. Tesis en opción al título de Máster en Ciencias de la Educación. ISP "Silverio Blanco Núñez". Sancti Spíritus.

124.Zilberstein, J. (2000). Reflexiones acerca de qué es un resultado científico en la investigación educativa y qué vías son las más propicias para introducirlo. *Ciencias Pedagógicas, 1 (2).* Recuperado el 6 de octubre de 2006, en *http://cied.rimed.cu/revista/12/portada/laportadaa1r2.html*

1

2 ANEXOS

Anexo 1.

Comprobación de conocimientos y habilidades.

Nombre: ___________________________ No. _______ Grupo: _____

Cuestionario.

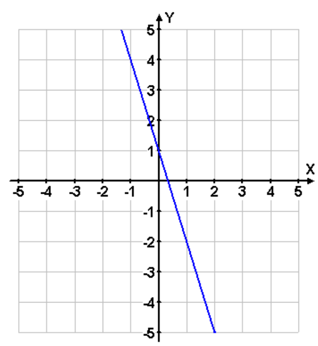
1- Representa analítica o gráficamente, según corresponda, cada una de las funciones siguientes.

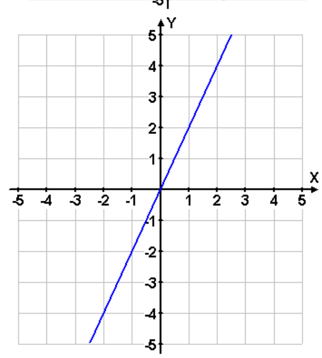
a) $f_{(x)} = \frac{1}{3}x + 2,\ x \in \Re$

b) $f_{(x)} = -\frac{2}{5}x,\ x \in \Re$

c) $f_{(x)} = -4,\ x \in \Re$

d) $f_{(x)} = -2x + 1,\ x \in \Re$

e) 

f) 

1.1 Diga cuál es la pendiente del gráfico de cada una de las funciones representadas anteriormente.

2- Dadas las siguientes funciones de dominio el conjunto de los números reales.

a) $f_{(x)} = 2x$
b) $f_{(x)} = 3x$
c) $f_{(x)} = -0,5x$
d) $f_{(x)} = -x$
e) $f_{(x)} = \frac{3}{4}x$
f) $f_{(x)} = -3x$
g) $f_{(x)} = x + 2$
h) $f_{(x)} = x - 1$
i) $f_{(x)} = x + 1$
j) $f_{(x)} = x – 0,3$
k) $f_{(x)} = x + 4$
l) $f_{(x)} = x - 3$

Responde, sin representarlas gráficamente, las preguntas siguientes:

1. Si se representan gráficamente en un mismo sistema de coordenadas rectangulares las funciones de los incisos a, b, c, d, e, y f, en cuál de ellas su gráfico forma con el semieje positivo de las “x” el ángulo de menor amplitud y en cuál forma el ángulo de mayor amplitud.
2. Si se representan gráficamente en un mismo sistema de coordenadas rectangulares las funciones de los incisos g, h, i, j, k, y l, en cuál de ellas el gráfico pasa más cerca del origen de coordenadas, en cuál pasa más lejos.

Anexo 2.

Guía de entrevista.

Objetivo: Acopiar opiniones sobre los aspectos que se priorizan, por parte de los profesores de Matemática, en el proceso de enseñanza – aprendizaje de las funciones cuadráticas en décimo grado.

Preguntas a realizar.

1. ¿A qué aspectos se le hace mayor énfasis en el proceso de enseñanza – aprendizaje de las funciones cuadráticas?
2. ¿Se utiliza el ordenador como medio para que los estudiantes comprendan las transformaciones de las funciones, en los contenidos relacionados con las funciones cuadráticas?
3. A su juicio, ¿en qué aspectos los estudiantes presentan mayor dificultad una vez recibidos los contenidos relacionados con las funciones cuadráticas y cuáles vencen con mayor facilidad? ¿A qué cree usted que se debe esto?

Anexo 3.

Condiciones para la coincidencia de representaciones analíticas.				
Rep. \ Rep.	RE	RC	RM	RF
RE	Siempre	Si b=0	Si b=0 y c=0	Si b=0
RC	Si d=0	Siempre	Si e=0	Siempre
RM	Si g=0 y r=0	Si g=r	Siempre	Si g=r
RF	Si h=0	Siempre	Si k=0	Siempre
Leyenda: RE: representación forma estándar. RC: representación forma canónica. RM: representación forma multiplicativa. RF: representación forma del foco.				

Anexo 4.

Transferencias robables a realizar entre representaciones analíticas (estándar, canónica y multiplicativa) y gráfica de funciones cuadráticas.

Transfe-rencia	No.	Vías probables	Tipo	Transfe-rencia	No.	Vías probables	Tipo
De RE a RC	1	RE→RC	Directa	De RC a RG	31	RC→RG	Directa
	2	RE→RG→RC	Indirecta		32	RC→RE→RG	Indirecta
	3	RE→RM→RC	Indirecta		33	RC→RM→RG	Indirecta
	4	RE→RM→RG→RC	Indirecta		34	RC→RM→RE→RG	Indirecta
	5	RE→RG→RM→RC	Indirecta		35	RC→RE→RM→RG	Indirecta
De RC a RE	6	RC→RE	Directa	De RG a RC	36	RG→RC	Directa
	7	RC→RG→RE	Indirecta		37	RG→RE→RC	Indirecta
	8	RC→RM→RE	Indirecta		38	RG→RM→RC	Indirecta
	9	RC→RM→RG→RE	Indirecta		39	RG→RM→RE→RC	Indirecta
	10	RC→RG→RM→RE	Indirecta		40	RG→RE→RM→RC	Indirecta
De RE a RG	11	RE→RG	Directa	De RC a RM	41	RC→RM	Directa
	12	RE→RC→RG	Indirecta		42	RC→RE→RM	Indirecta
	13	RE→RM→RG	Indirecta		43	RC→RG→RM	Indirecta
	14	RE→RM→RC→RG	Indirecta		44	RC→RG→RE→RM	Indirecta
	15	RE→RC→RM→RG	Indirecta		45	RC→RE→RG→RM	Indirecta
De RG a RE	16	RG→RE	Directa	De RM a RC	46	RM→RC	Directa
	17	RG→RC→RE	Indirecta		47	RM→RG→RC	Indirecta
	18	RG→RM→RE	Indirecta		48	RM→RE→RC	Indirecta
	19	RG→RM→RC→RE	Indirecta		49	RM→RE→RG→RC	Indirecta
	20	RG→RC→RM→RE	Indirecta		50	RM→RG→RE→RC	Indirecta
De RE a RM	21	RE→RM	Directa	De RM a RG	51	RM→RG	Directa
	22	RE→RG→RM	Indirecta		52	RM→RC→RG	Indirecta
	23	RE→RC→RM	Indirecta		53	RM→RE→RG	Indirecta
	24	RE→RC→RG→RM	Indirecta		54	RM→RE→RC→RG	Indirecta
	25	RE→RG→RC→RM	Indirecta		55	RM→RC→RE→RG	Indirecta
De RM a RE	26	RM→RE	Directa	De RG a RM	56	RG→RM	Directa
	27	RM→RG→RE	Indirecta		57	RG→RE→RM	Indirecta
	28	RM→RC→RE	Indirecta		58	RG→RC→RM	Indirecta
	29	RM→RC→RG→RE	Indirecta		59	RG→RE→RC→RM	Indirecta
	30	RM→RG→RC→RE	Indirecta		60	RG→RC→RE→RM	Indirecta

Leyenda:
RE: representación estándar.
RC: representación canónica.
RM: representación multiplicativa.
RG: representación gráfica.

En cada cadena intervienen símbolos de representaciones y flechas. El primero, de izquierda a derecha, se refiere a la representación dada y el último a la buscada. La flecha representa el paso de una representación a otra.

Anexo 5.

Transferencias posibles, con lápiz y papel, a realizar entre representaciones analíticas (estándar, canónica y multiplicativa) y gráfica de funciones cuadráticas.							
Transfe-rencia	**No.**	**Vías posibles**	**Tipo**	**Transfe-rencia**	**No.**	**Vías posibles**	**Tipo**
De RE a RC	**1**	**RE→RC**	**Directa**	**De RC a RG**	**19**	**RC→RG**	**Directa**
	2	**RE→RG→RC**	**Indirecta**		**20**	**RC→RE→RG**	**Indirecta**
	3	**RE→RM→RG→RC**	**Indirecta**		**21**	**RC→RE→RM→RG**	**Indirecta**
De RC a RE	**4**	**RC→RE**	**Directa**	**De RG a RC**	**22**	**RG→RC**	**Directa**
	5	**RC→RG→RE**	**Indirecta**		**23**	**RG→RE→RC**	**Indirecta**
	6	**RC→RG→RM→RE**	**Indirecta**		**24**	**RG→RM→RE→RC**	**Indirecta**
De RE a RG	**7**	**RE→RG**	**Directa**	**De RC a RM**	**25**	**RC→RM**	**Directa**
	8	**RE→RC→RG**	**Indirecta**		**26**	**RC→RE→RM**	**Indirecta**
	9	**RE→RM→RG**	**Indirecta**		**27**	**RC→RG→RM**	**Indirecta**
					28	**RC→RG→RE→RM**	**Indirecta**
					29	**RC→RE→RG→RM**	**Indirecta**
De RG a RE	**10**	**RG→RE**	**Directa**	**De RM a RC**	**30**	**RM→RG→RC**	**Indirecta**
	11	**RG→RC→RE**	**Indirecta**		**31**	**RM→RE→RC**	**Indirecta**
	12	**RG→RM→RE**	**Indirecta**		**32**	**RM→RE→RG→RC**	**Indirecta**
					33	**RM→RG→RE→RC**	**Indirecta**
De RE a RM	**13**	**RE→RM**	**Directa**	**De RM a RG**	**34**	**RM→RG**	**Directa**
	14	**RE→RG→RM**	**Indirecta**		**35**	**RM→RE→RG**	**Indirecta**
	15	**RE→RC→RG→RM**	**Indirecta**		**36**	**RM→RE→RC→RG**	**Indirecta**
De RM a RE	**16**	**RM→RE**	**Directa**	**De RG a RM**	**37**	**RG→RM**	**Directa**
	17	**RM→RG→RE**	**Indirecta**		**38**	**RG→RE→RM**	**Indirecta**
	18	**RM→RG→RC→RE**	**Indirecta**		**39**	**RG→RC→RE→RM**	**Indirecta**
Leyenda: RE: representación estándar. RC: representación canónica. RM: representación multiplicativa. RG: representación gráfica.							

En cada cadena intervienen símbolos de representaciones y flechas. El primero, de izquierda a derecha, se refiere a la representación dada y el último a la buscada. La flecha representa el paso de una representación a otra.

Anexo 6.

Procedimientos de transferencia directa (con lápiz y papel) de la representación analítica estándar a la representación canónica (RE$\rightarrow$RC) de una función cuadrática en función de las condiciones de los parámetros.		
Caso	Condiciones para los parámetros **a**, **b** y **c**.	Procedimiento
1	$\mathbf{a}=1$, $\mathbf{b}\neq 0$ y $\mathbf{b}^2=4\mathbf{ac}$	1
2	$\mathbf{a}\neq 0$, $\mathbf{a}\neq 1$, $\mathbf{b}\neq 0$ y $\mathbf{b}^2=4\mathbf{ac}$	2
3	$\mathbf{a}<0$, $\mathbf{b}\neq 0$, $\mathbf{c}\neq 0$ y $\mathbf{b}^2\neq 4\mathbf{ac}$	4
4	$\mathbf{a}<0$, $\mathbf{b}\neq 0$ y $\mathbf{c}=0$	5
5	$\mathbf{a}=1$, $\mathbf{b}\neq 0$ y $\mathbf{b}^2\neq 4\mathbf{c}$	3
6	$\mathbf{a}>0$, $\mathbf{a}\neq 1$, $\mathbf{b}\neq 0$ y $\mathbf{c}=0$	5 ó 6
7	$\mathbf{a}>0$, $\mathbf{a}\neq 1$, $\mathbf{b}\neq 0$ y $\mathbf{b}^2\neq 4\mathbf{ac}$	4 ó 6

Procedimientos particulares

Procedimiento 1: para transferir de la ecuación $y= \mathbf{a}x^2+\mathbf{b}x+\mathbf{c}$ a la ecuación $y=\mathbf{a}(x+\mathbf{d})^2+\mathbf{e}$, con lápiz y papel ($\mathbf{a}=1$, $\mathbf{b}\neq 0$ y $\mathbf{b}^2 = 4\mathbf{ac}$).

- Verificar que $\mathbf{b}^2 = 4\mathbf{ac}$.
- Transformar el miembro derecho de la ecuación funcional en el cuadrado de un binomio, aplicando la fórmula del binomio o algún procedimiento de factorización.

Procedimiento 2: para transferir de la ecuación $y= \mathbf{a}x^2+\mathbf{b}x+\mathbf{c}$ a la ecuación $y=\mathbf{a}(x+\mathbf{d})^2+\mathbf{e}$, con lápiz y papel ($\mathbf{a}\neq 0$, $\mathbf{a}\neq 1$, $\mathbf{b}\neq 0$ y $\mathbf{b}^2 = 4\mathbf{ac}$).

- Verificar que $\mathbf{b}^2 = 4\mathbf{ac}$.
- En el miembro derecho de la ecuación funcional, extraer factor común "**a**" a la izquierda.
- En el miembro derecho de la ecuación funcional, transformar el factor que multiplica a "**a**" en el cuadrado de un binomio, aplicando la fórmula del binomio o algún procedimiento de factorización.

Procedimiento 3: para transferir de la ecuación $y= \mathbf{a}x^2+\mathbf{b}x+\mathbf{c}$ a la ecuación $y=\mathbf{a}(x+\mathbf{d})^2+\mathbf{e}$, con lápiz y papel ($\mathbf{a}=1$, $\mathbf{b}\neq 0$ y $\mathbf{b}^2 \neq 4\mathbf{c}$).

- Verificar que $\mathbf{b}^2 \neq 4\mathbf{c}$.
- Realizar completamiento cuadrático al miembro derecho de la ecuación funcional.

Procedimiento 4: para transferir de la ecuación $y= \mathbf{a}x^2+\mathbf{b}x+\mathbf{c}$ a la ecuación $y=\mathbf{a}(x+\mathbf{d})^2+\mathbf{e}$, con lápiz y papel ($\mathbf{a}\neq 0$, $\mathbf{a}\neq 1$, $\mathbf{b}\neq 0$, $\mathbf{c}\neq 0$ y $\mathbf{b}^2 \neq 4\mathbf{ac}$).

- Verificar que $\mathbf{b}^2 \neq 4\mathbf{ac}$.

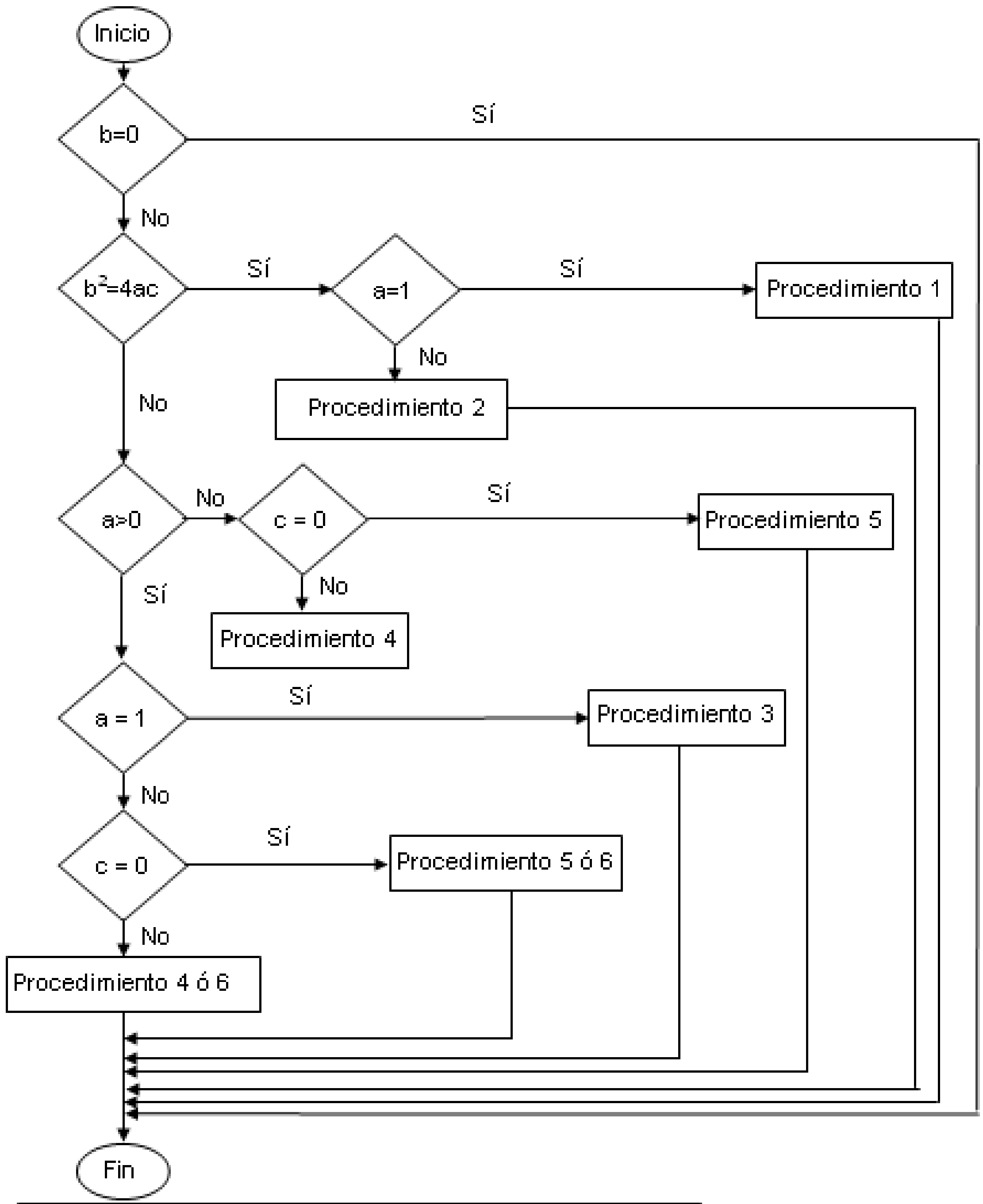
- Extraer factor común “**a**” a la izquierda en el binomio formado por los términos cuadrático y lineal del miembro derecho de la ecuación funcional.
- Aplicar completamiento cuadrático al binomio que multiplica al factor “**a**”.
- Aplicar propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la sustracción a la derecha, en el producto del factor “**a**” y la expresión que contiene el cuadrado del binomio obtenido en el completamiento cuadrático.
- Realizar operación aritmética con los términos numéricos de la expresión obtenida en el paso anterior.

Procedimiento 5: para transferir de la ecuación $y= \mathbf{a}x^2+\mathbf{b}x+\mathbf{c}$ a la ecuación $y=\mathbf{a}(x+\mathbf{d})^2+\mathbf{e}$, con lápiz y papel ($\mathbf{a}\neq 0$, $\mathbf{a}\neq 1$, $\mathbf{b}\neq 0$, $\mathbf{c}=0$ y $\mathbf{b}^2 \neq 4\mathbf{ac}$).

- Verificar que $\mathbf{b}^2 \neq 4\mathbf{ac}$.
- Extraer factor común “**a”** a la izquierda en el binomio formado por los términos cuadrático y lineal del miembro derecho de la ecuación funcional.
- Aplicar completamiento cuadrático al binomio que multiplica al factor “**a**”.
- Aplicar propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la sustracción a la derecha, en el producto del factor “**a**” y la expresión que contiene el cuadrado del binomio obtenido en el completamiento cuadrático.

Procedimiento 6: para transferir de la ecuación $y= \mathbf{a}x^2+\mathbf{b}x+\mathbf{c}$ a la ecuación $y=\mathbf{a}(x+\mathbf{d})^2+\mathbf{e}$, con lápiz y papel ($\mathbf{a}>0$, $\mathbf{b}\neq 0$ y $\mathbf{b}^2 \neq 4\mathbf{ac}$).

- Verificar que $\mathbf{b}^2 \neq 4\mathbf{ac}$.
- Aplicar completamiento cuadrático al miembro derecho de la ecuación funcional, considerando el término cuadrático como una potencia de exponente 2.
- Transformar el miembro derecho de la ecuación funcional, obtenida en el paso anterior, de manera que el binomio cuadrático se exprese como el producto del parámetro “**a**” y el cuadrado de un binomio.



Procedimiento general de la transferencia RE→RC.

Anexo 7.

Procedimientos de transferencia directa (con lápiz y papel) de la representación analítica canónica a la representación estándar (RC→ RE) de una función cuadrática en función de las condiciones de los parámetros.		
Caso	Condiciones para los parámetros **a**, **d** y **e**.	Procedimiento
1	**a**=1, **d**≠0 y **e**≠0	1
2	**a**≠0, **a**≠1, **d**≠0 y **e**≠0	2
3	**a**=1, **d**≠0 y **e**=0	3
4	**a**≠0, **a**≠1, **d**≠0 y **e**=0	4

Procedimientos particulares

Procedimiento 1: para transferir de la ecuación $y=\mathbf{a}(x+\mathbf{d})^2+\mathbf{e}$ a la ecuación $y=\mathbf{a}x^2+\mathbf{b}x+\mathbf{c}$, con lápiz y papel (**a**=1, **d**≠0 y **e**≠0).

- Desarrollar el producto notable $(x+\mathbf{d})^2$.
- Reducir términos semejantes.

Procedimiento 2: para transferir de la ecuación $y=\mathbf{a}(x+\mathbf{d})^2+\mathbf{e}$ a la ecuación $y=\mathbf{a}x^2+\mathbf{b}x+\mathbf{c}$, con lápiz y papel (**a**≠0, **a**≠1, **d**≠0 y **e**≠0).

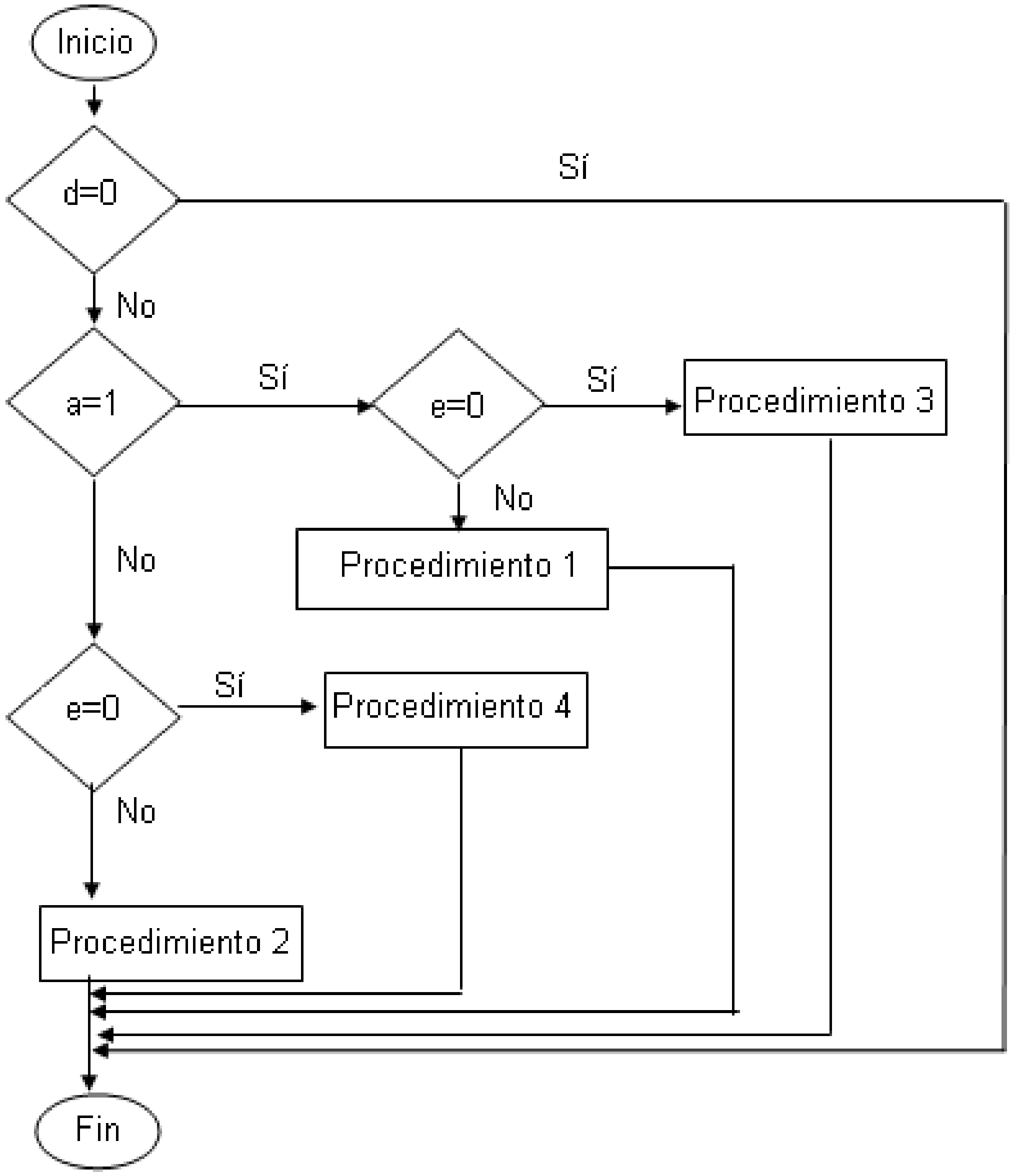
- Desarrollar el producto notable $(x+\mathbf{d})^2$.
- Aplicar propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición a la derecha.
- Reducir términos semejantes.

Procedimiento 3: para transferir de la ecuación $y=\mathbf{a}(x+\mathbf{d})^2+\mathbf{e}$ a la ecuación $y=\mathbf{a}x^2+\mathbf{b}x+\mathbf{c}$, con lápiz y papel (**a**=1, **d**≠0 y **e**=0).

- Desarrollar el producto notable $(x+\mathbf{d})^2$.

Procedimiento 4: para transferir de la ecuación $y=\mathbf{a}(x+\mathbf{d})^2+\mathbf{e}$ a la ecuación $y=\mathbf{a}x^2+\mathbf{b}x+\mathbf{c}$, con lápiz y papel (**a**≠0, **a**≠1, **d**≠0 y **e**=0).

- Desarrollar el producto notable $(x+\mathbf{d})^2$.
- Aplicar propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición a la derecha.



Procedimiento general de la transferencia RC→RE.

Anexo 8.

Procedimientos de transferencia directa (con lápiz y papel) de la representación analítica estándar a la representación multiplicativa (RE→ RM) de una función cuadrática en función de las condiciones de los parámetros.		
Caso	Condiciones para los parámetros **a**, **b** y **c**.	Procedimiento
1	$\mathbf{a}=1$, $\mathbf{b}\neq 0$, $\mathbf{c}\neq 0$ y $\mathbf{b}^2\geq 4\mathbf{ac}$	1
2	$\mathbf{a}\neq 0$, $\mathbf{a}\neq 1$, $\mathbf{b}\neq 0$, $\mathbf{c}\neq 0$ y $\mathbf{b}^2\geq 4\mathbf{ac}$	2
3	$\mathbf{a}=1$, $\mathbf{b}\neq 0$ y $\mathbf{c}=0$	3
4	$\mathbf{a}=1$, $\mathbf{b}=0$ y $\mathbf{c}<0$	4
5	$\mathbf{a}\neq 0$, $\mathbf{a}\neq 1$, $\mathbf{b}=0$ y $\mathbf{c}<0$	5
6	$\mathbf{a}\neq 0$, $\mathbf{a}\neq 1$, $\mathbf{b}\neq 0$ y $\mathbf{c}=0$	6

Procedimientos particulares

Procedimiento 1: para transferir de la ecuación $y=\mathbf{a}x^2+\mathbf{b}x+\mathbf{c}$ a la ecuación $y=\mathbf{a}(x+\mathbf{g})(x+\mathbf{r})$, con lápiz y papel ($\mathbf{a}=1$, $\mathbf{b}\neq 0$, $\mathbf{c}\neq 0$ y $\mathbf{b}^2\geq 4\mathbf{ac}$).

- Comprobar que $\mathbf{b}^2 \geq 4\mathbf{ac}$.
- Descomponer el trinomio en factores utilizando algún procedimiento pertinente.

Procedimiento 2: para transferir de la ecuación $y=\mathbf{a}x^2+\mathbf{b}x+\mathbf{c}$ a la ecuación $y=\mathbf{a}(x+\mathbf{g})(x+\mathbf{r})$, con lápiz y papel ($\mathbf{a}\neq 0$, $\mathbf{a}\neq 1$, $\mathbf{b}\neq 0$, $\mathbf{c}\neq 0$ y $\mathbf{b}^2\geq 4\mathbf{ac}$).

- Comprobar que $\mathbf{b}^2 \geq 4\mathbf{ac}$.
- Extraer factor común "**a**" a la izquierda en el miembro derecho de la ecuación funcional.
- Descomponer en factores el trinomio que multiplica al factor "**a**" utilizando algún procedimiento pertinente.

Procedimiento 3: para transferir de la ecuación $y=\mathbf{a}x^2+\mathbf{b}x+\mathbf{c}$ a la ecuación $y=\mathbf{a}(x+\mathbf{g})(x+\mathbf{r})$, con lápiz y papel ($\mathbf{a}=1$, $\mathbf{b}\neq 0$ y $\mathbf{c}=0$).

- Descomponer en factores el binomio cuadrático del miembro derecho de la ecuación funcional utilizando la extracción del factor común x.

Procedimiento 4: para transferir de la ecuación $y=\mathbf{a}x^2+\mathbf{b}x+\mathbf{c}$ a la ecuación $y=\mathbf{a}(x+\mathbf{g})(x+\mathbf{r})$, con lápiz y papel ($\mathbf{a}=1$, $\mathbf{b}=0$ y $\mathbf{c}<0$).

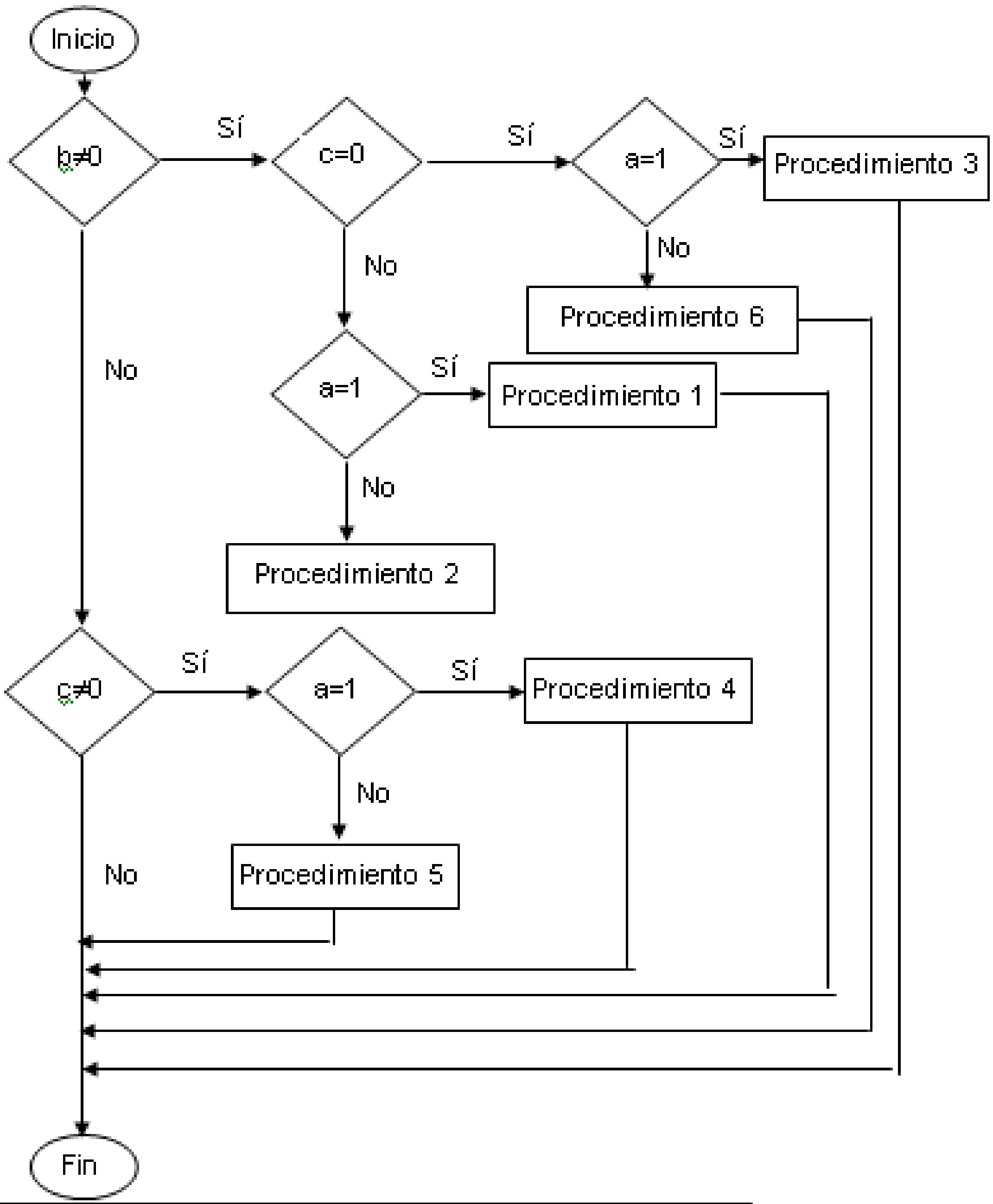
- Descomponer en factores el binomio cuadrático del miembro derecho de la ecuación funcional utilizando la descomposición aplicable a las diferencias de cuadrados.

Procedimiento 5: para transferir de la ecuación $y=\mathbf{a}x^2+\mathbf{b}x+\mathbf{c}$ a la ecuación $y=\mathbf{a}(x+\mathbf{g})(x+\mathbf{r})$, con lápiz y papel ($\mathbf{a}\neq 0$, $\mathbf{a}\neq 1$, $\mathbf{b}=0$ y $\mathbf{c}<0$).

- Extraer factor común "**a**" a la izquierda en el miembro derecho de la ecuación funcional.
- Descomponer en factores el binomio que multiplica al factor "**a**" utilizando la descomposición aplicable a las diferencias de cuadrados.

Procedimiento 6: para transferir de la ecuación y= $\mathbf{a}x^2+\mathbf{b}x+\mathbf{c}$ a la ecuación y=$\mathbf{a}(x+\mathbf{g})\ (x+\mathbf{r})$, con lápiz y papel ($\mathbf{a}\neq 0$, $\mathbf{a}\neq 1$, $\mathbf{b}\neq 0$ y $\mathbf{c}=0$).

- Descomponer el binomio cuadrático del miembro derecho de la ecuación funcional utilizando la extracción del factor común **a**x.



Procedimiento general de la transferencia RE→RM

Anexo 9.

Procedimientos de transferencia directa (con lápiz y papel) de la representación analítica multiplicativa a la representación estándar (RM$\rightarrow$ RE) de una función cuadrática en función de las condiciones de los parámetros.		
Caso	Condiciones para los parámetros **a**, **g** y **r**.	Procedimiento
1	**a**=1, **g**=0 o **r**=0 y **g**≠**r**	1
2	**a**≠0, **a**≠1, **g**=0 o **r**=0 y **g**≠**r**	2
3	**a**=1, **g**≠0, **r**≠0 y **g**≠**r**	3
4	**a**=1, **g**≠0, **r**≠0 y **g**=**r**	4
5	**a**≠0, **a**≠1, **g**≠0, **r**≠0 y **g**=**r**	5
6	**a**≠0, **a**≠1, **g**≠0, **r**≠0 y **g**≠**r**	6

Procedimientos particulares

Procedimiento 1: para transferir de la ecuación y=**a**(x+**g**) (x+**r**) a la ecuación y=**a**x^2+**b**x+**c**, con lápiz y papel (**a**=1, **g**=0 o **r**=0 y **g**≠**r**).

- Aplicar propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición en el miembro derecho de la ecuación funcional para hallar el producto de un binomio y un monomio.

Procedimiento 2: para transferir de la ecuación y=**a**(x+**g**) (x+**r**) a la ecuación y=**a**x^2+**b**x+**c**, con lápiz y papel (**a**≠0, **a**≠1, **g**=0 o **r**=0 y **g**≠**r**).

- Aplicar propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición en el miembro derecho de la ecuación funcional para hallar el producto de un número, un binomio y un monomio.

Procedimiento 3: para transferir de la ecuación y=**a**(x+**g**) (x+**r**) a la ecuación y=**a**x^2+**b**x+**c**, con lápiz y papel (**a**=1, **g**≠0, **r**≠0 y **g**≠**r**).

- Aplicar propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición en el miembro derecho de la ecuación funcional para hallar el producto de dos binomios.

Procedimiento 4: para transferir de la ecuación y=**a**(x+**g**) (x+**r**) a la ecuación y=**a**x^2+**b**x+**c**, con lápiz y papel (**a**=1, **g**≠0, **r**≠0 y **g**=**r**).

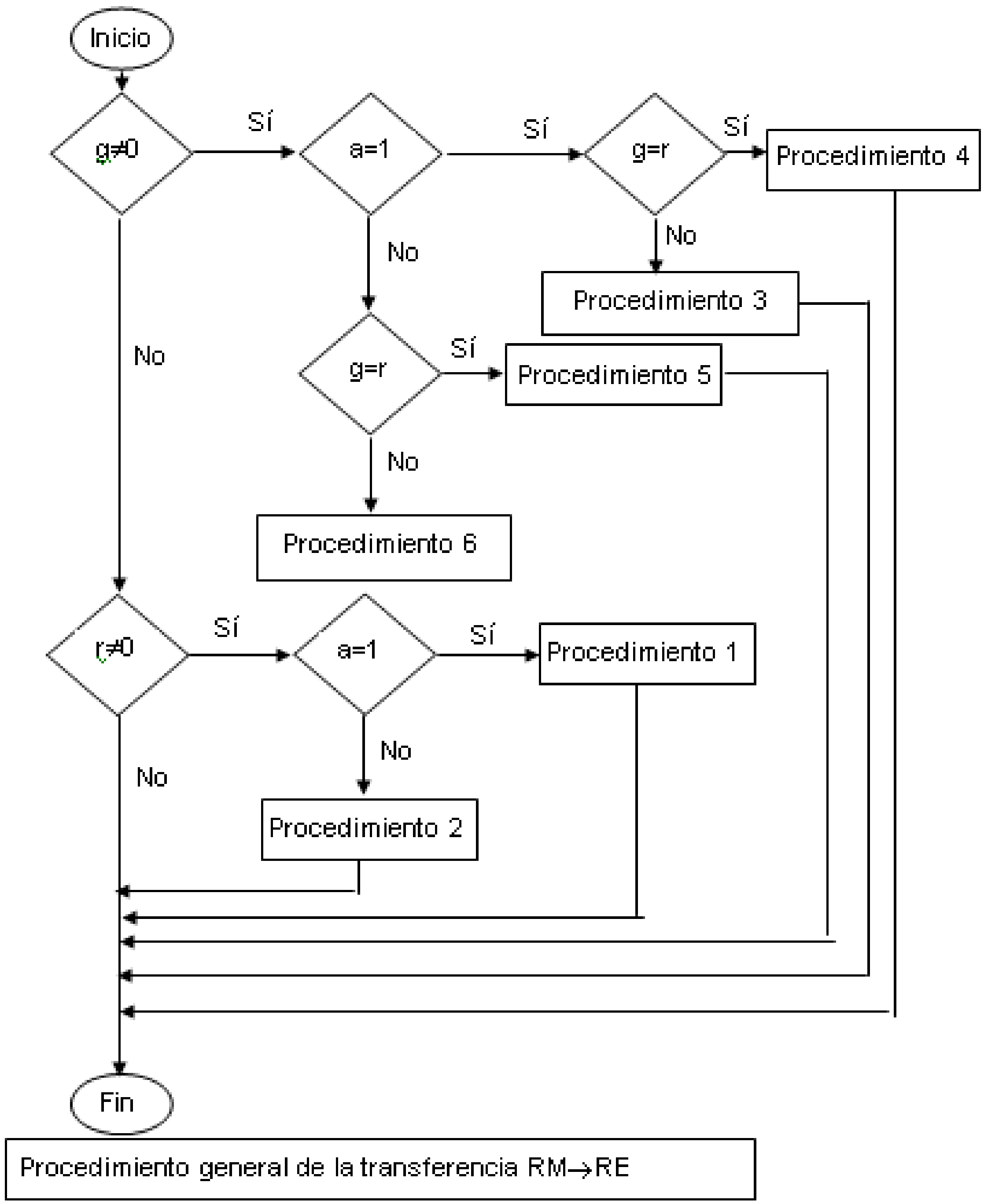
- Desarrollar el producto notable: “Cuadrado de una suma o diferencia” en el miembro derecho de la ecuación funcional.

Procedimiento 5: para transferir de la ecuación y=**a**(x+**g**) (x+**r**) a la ecuación y=**a**x^2+**b**x+**c**, con lápiz y papel (**a**≠0, **a**≠1, **g**≠0, **r**≠0 y **g**=**r**).

- Desarrollar el producto notable “Cuadrado de una suma o diferencia” con el factor que multiplica a “**a**” en el miembro derecho de la ecuación funcional.
- Aplicar propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición.

Procedimiento 6: para transferir de la ecuación y=**a**(x+**g**) (x+**r**) a la ecuación y=**a**x^2+**b**x+**c**, con lápiz y papel (**a**≠0, **a**≠1, **g**≠0, **r**≠0 y **g**≠**r**).

- Aplicar propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición en el miembro derecho de la ecuación funcional para hallar el producto de un número y dos binomios.



Anexo 10.

Procedimientos de transferencia directa (con lápiz y papel) de la representación analítica canónica a la representación multiplicativa (RC$\rightarrow$ RM) de una función cuadrática en función de las condiciones de los parámetros.		
Caso	Condiciones para los parámetros **a**, **d** y **e**.	Procedimiento
1	**a**=1, **d**=0 y **e**<0	1
2	**a**$\neq$0, **a**$\neq$1, **d**=0, **e**$\neq$0 y **a** $\bullet$ **e**<0	2

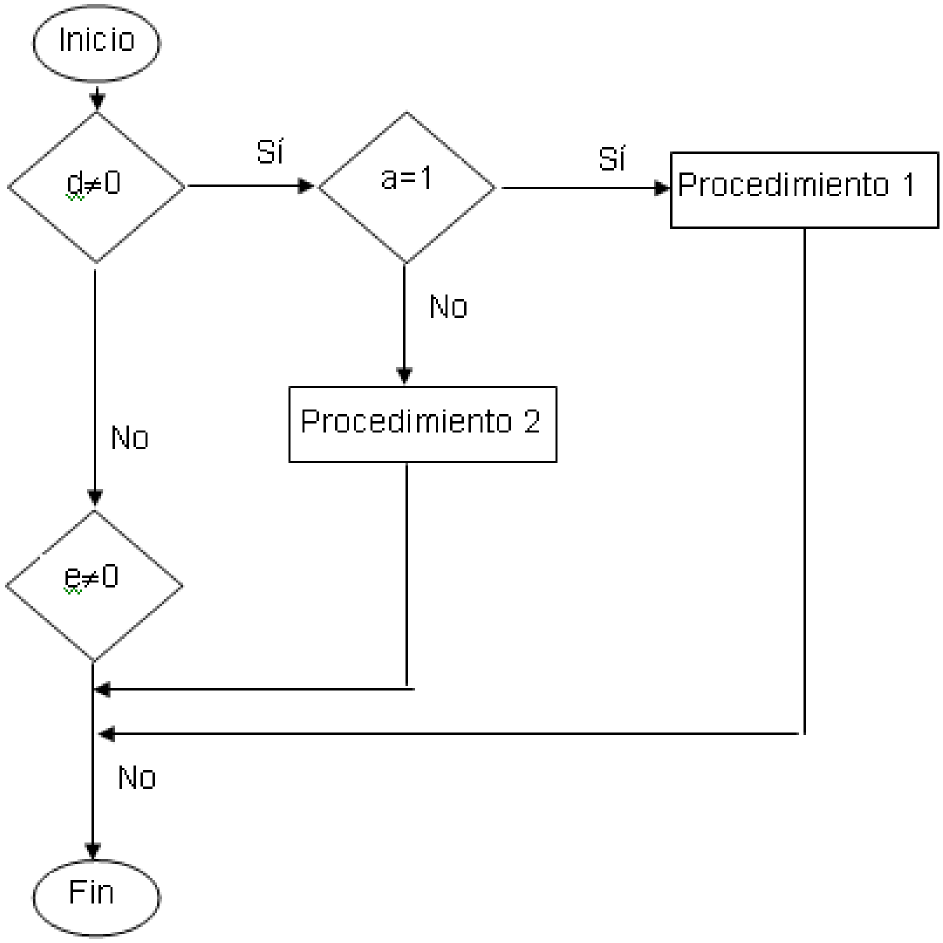
Procedimientos particulares

Procedimiento 1: para transferir de la ecuación y=**a**(x+**d**)^2+**e** a la ecuación y=**a**(x+**g**) (x+**r**), con lápiz y papel (**a**=1, **d**=0 y **e**<0).

- Descomponer en factores el miembro derecho de la ecuación funcional utilizando la descomposición aplicable a las diferencias de cuadrados.

Procedimiento 2: para transferir de la ecuación y=**a**(x+**d**)^2+**e** a la ecuación y=**a**(x+**g**) (x+**r**), con lápiz y papel (**a**$\neq$0, **a**$\neq$1, **d**=0, **e**$\neq$0 y **a** $\bullet$ **e**<0).

- Verificar que **a** $\bullet$ **e**<0.
- Extraer factor común "**a**" a la izquierda en el miembro derecho de la ecuación funcional.
- Descomponer en factores el factor que multiplica a "**a**" en el miembro derecho de la ecuación funcional, utilizando la descomposición aplicable a las diferencias de cuadrados.



Procedimiento general de la transferencia RC→RM

Anexo 11.

Procedimientos de transferencia directa (con lápiz y papel) de la representación analítica multiplicativa a la representación canónica (RM→ RC) de una función cuadrática en función de las condiciones de los parámetros.		
Caso	Condiciones para los parámetros **a**, **g** y **r**.	Procedimiento
1	**a**=1 y **g**=-**r**	1
2	**a**≠0, **a**≠1 y **g**=-**r**	2

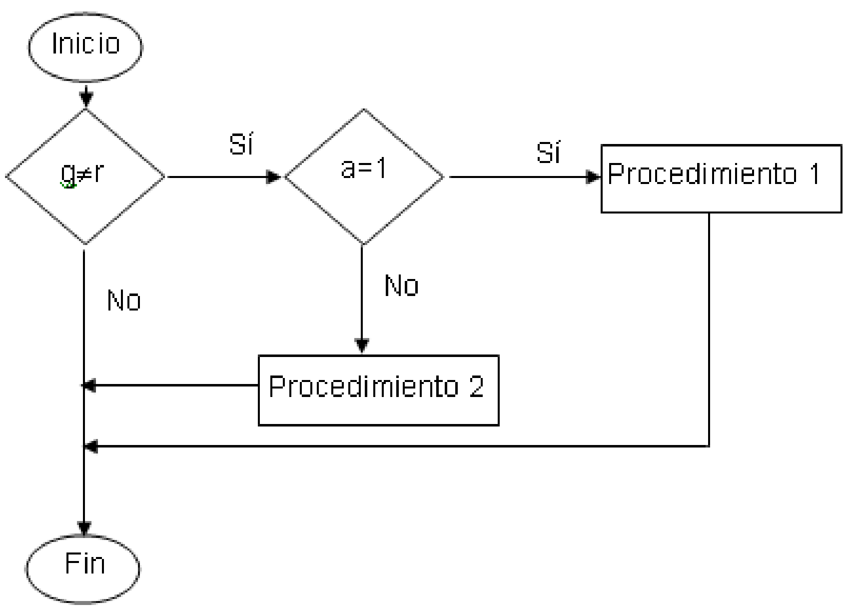
Procedimientos particulares

Procedimiento 1: para transferir de la ecuación y=**a**(x+**g**) (x+**r**) a la ecuación y=**a**(x+**d**)^2+**e**, con lápiz y papel (**a**=1 y **g**=-**r**).

- Aplicar el producto notable “Producto de dos binomios que tiene un término común”.

Procedimiento 2: para transferir de la ecuación y=**a**(x+**g**) (x+**r**) a la ecuación y=**a**(x+**d**)^2+**e**, con lápiz y papel (**a**≠0, **a**≠1 y **g**=-**r**).

- Aplicar el producto notable “Producto de dos binomios que tiene un término común”.
- Aplicar propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la sustracción a la derecha, en el producto del factor “**a**” y la expresión que contiene al binomio obtenido en el producto notable.



Procedimiento general de la transferencia RM→RC

Anexo 12.

Procedimientos de transferencia directa (con lápiz y papel) de la representación analítica estándar a la representación gráfica (RE$\rightarrow$ RG) de una función cuadrática en función de las condiciones de los parámetros.		
Caso	Condiciones para los parámetros **a**, **b** y **c**.	Procedimiento
1	**a**=1, **b**=0 y **c**=0	1
2	**a**≠0, **a**≠1, **b**=0 y **c**=0	2
3	**a**=1, **b**≠0 y **c**≠0	3
4	**a**≠0, **a**≠1, **b**≠0 y **c**≠0	4
5	**a**=1, **b**≠0 y **c**=0	5
6	**a**≠0, **a**≠1, **b**≠0 y **c**=0	6
7	**a**=1, **b**=0 y **c**≠0	7
8	**a**≠0, **a**≠1, **b**=0 y **c**≠0	8

Procedimientos particulares

Procedimiento 1: para transferir de la ecuación y= **a**x^2+**b**x+**c** a la representación gráfica, con lápiz y papel (**a**=1, **b**=0 y **c**=0).

- Determinar el vértice, el cual tiene por coordenadas (0; 0).
- Determinar el punto (-1; 1) y su simétrico (1; 1).
- Representar los tres puntos determinados en un sistema de coordenadas rectangulares.
- Traza la curva que pase por los tres puntos representados.

Procedimiento 2: para transferir de la ecuación y= **a**x^2+**b**x+**c** a la representación gráfica, con lápiz y papel (**a**≠0, **a**≠1, **b**=0 y **c**=0).

- Determinar el vértice, el cual tiene por coordenadas (0; 0).
- Determinar el punto (-1; **a**) y su simétrico (1; **a**).
- Representar los tres puntos determinados en un sistema de coordenadas rectangulares.
- Traza la curva que pase por los tres puntos representados.

Procedimiento 3: para transferir de la ecuación y= **a**x^2+**b**x+**c** a la representación gráfica, con lápiz y papel (**a**=1, **b**≠0 y **c**≠0).

- Determinar el vértice, el cual tiene por coordenadas ($\frac{-b}{2}$; $\frac{-b^2+4c}{4}$).
- Determinar el punto (0; **c**) y su simétrico (-**b**; **c**).

- Representar los tres puntos determinados en un sistema de coordenadas rectangulares.
- Traza la curva que pase por los tres puntos representados.

Procedimiento 4: para transferir de la ecuación y= **a**x^2+**b**x+**c** a la representación gráfica, con lápiz y papel (**a**≠0, **a**≠1, **b**≠0 y **c**≠0).

- Determinar el vértice, el cual tiene por coordenadas ($\frac{-b}{2a}$; $\frac{-b^2+4ac}{4a}$).
- Determinar el punto (0; **c**) y su simétrico ($\frac{-b}{a}$; **c**).
- Representar los tres puntos determinados en un sistema de coordenadas rectangulares.
- Traza la curva que pase por los tres puntos representados.

Procedimiento 5: para transferir de la ecuación y= **a**x^2+**b**x+**c** a la representación gráfica, con lápiz y papel (**a**=1, **b**≠0 y **c**=0).

- Determinar el vértice, el cual tiene por coordenadas ($\frac{-b}{2}$; $\frac{-b^2}{4}$).
- Determinar el punto (-**b**; 0) y su simétrico (0; 0).
- Representar los tres puntos determinados en un sistema de coordenadas rectangulares.
- Traza la curva que pase por los tres puntos representados.

Procedimiento 6: para transferir de la ecuación y= **a**x^2+ **b**x+**c** a la representación gráfica, con lápiz y papel (**a**≠0, **a**≠1, **b**≠0 y **c**=0).

- Determinar el vértice, el cual tiene por coordenadas ($\frac{-b}{2a}$; $\frac{-b^2}{4a}$).
- Determinar el punto ($\frac{-b}{a}$; 0) y su simétrico (0; 0).
- Representar los tres puntos determinados en un sistema de coordenadas rectangulares.
- Traza la curva que pase por los tres puntos representados.

Procedimiento 7: para transferir de la ecuación y= **a**x^2+**b**x+**c** a la representación gráfica, con lápiz y papel (**a**=1, **b**=0 y **c**≠0).

- Determinar el vértice, el cual tiene por coordenadas (0; **c**).
- Determinar el (1; 1+**c**) y su simétrico (-1; 1+**c**).

- Representar los tres puntos determinados en un sistema de coordenadas rectangulares.
- Traza la curva que pase por los tres puntos representados.

Procedimiento 8: para transferir de la ecuación y= $\mathbf{a}x^2+\mathbf{b}x+\mathbf{c}$ a la representación gráfica, con lápiz y papel ($\mathbf{a}\neq 0$, $\mathbf{a}\neq 1$, $\mathbf{b}=0$ y $\mathbf{c}\neq 0$).

- Determinar el vértice, el cual tiene por coordenadas (0; **c**).
- Determinar el (1; **a**+**c**) y su simétrico (-1; **a**+**c**).
- Representar los tres puntos determinados en un sistema de coordenadas rectangulares.
- Traza la curva que pase por los tres puntos representados.

Anexo 13.

Procedimientos de transferencia directa (con lápiz y papel) de la representación gráfica a la representación analítica estándar (RG→ RE) de una función cuadrática en función de las condiciones gráficas.		
Caso	Condiciones gráficas	Procedimiento
1	Se conoce el punto de intersección con el eje de las ordenadas.	1
2	No se conoce el punto de intersección con el eje de las ordenadas.	2

Procedimientos particulares

Procedimiento 1: para transferir de la representación gráfica a la representación y=**a**x^2+**b**x+**c**, con lápiz y papel.

- Determinar el valor del parámetro **c** y las coordenadas de dos de los puntos por donde pasa el gráfico.
- Formar un sistema de ecuaciones lineales a partir de sustituir el valor del parámetro **c** y los dos puntos determinados.
- Resolver el sistema de ecuaciones lineales y determinar los valores de los parámetros **a** y **b**.
- Escribir la representación analítica.

Procedimiento 2: para transferir de la representación gráfica a la representación y= **a**x^2+**b**x+**c**, con lápiz y papel.

- Determinar las coordenadas de tres de los puntos por donde pasa el gráfico.
- Formar un sistema de ecuaciones lineales a partir de sustituir los tres puntos determinados.
- Resolver el sistema de ecuaciones lineales y determinar los valores de los parámetros **a** y **b** y **c**.
- Escribir la representación analítica.

Anexo 14.

Procedimientos de transferencia directa (con lápiz y papel) de la representación analítica canónica a la representación gráfica (RC$\rightarrow$ RG) de una función cuadrática en función de las condiciones de los parámetros.		
Caso	Condiciones para los parámetros **a**, **d** y **e**.	Procedimiento
1	**a**=1, **d**=0 y **e**=0	1
2	**a**≠0, **a**≠1, **d**=0 y **e**=0	2
3	**a**=1, **d**≠0 y **e**≠0	3 y 4
4	**a**≠0, **a**≠1, **d**≠0 y **e**≠0	5 y 6
5	**a**=1, **d**≠0 y **e**=0	7 y 8
6	**a**≠0, **a**≠1, **d**≠0 y **e**=0	9 y 10
7	**a**=1, **d**=0 y **e**≠0	11
8	**a**≠0, **a**≠1, **d**=0 y **e**≠0	12

Procedimientos particulares

Procedimiento 1: para transferir de la ecuación y= $\mathbf{a}(x+\mathbf{d})^2+\mathbf{e}$ a la representación gráfica, con lápiz y papel (**a**=1, **d**=0 y **e**=0).

- Determinar el vértice, el cual tiene por coordenadas (0; 0).
- Determinar el punto (-1; 1) y su simétrico (1; 1).
- Representar los tres puntos determinados en un sistema de coordenadas rectangulares.
- Traza la curva que pase por los tres puntos representados.

Procedimiento 2: para transferir de la ecuación y= $\mathbf{a}(x+\mathbf{d})^2+\mathbf{e}$ a la representación gráfica, con lápiz y papel (**a**≠0, **a**≠1, **d**=0 y **e**=0).

- Determinar el vértice, el cual tiene por coordenadas (0; 0).
- Determinar el punto (-1; **a**) y su simétrico (1; **a**).
- Representar los tres puntos determinados en un sistema de coordenadas rectangulares.
- Traza la curva que pase por los tres puntos representados.

Procedimiento 3: para transferir de la ecuación y=$\mathbf{a}(x+\mathbf{d})^2+\mathbf{e}$ a la representación gráfica, con lápiz y papel (**a**=1, **d**≠0 y **e**≠0).

- Determinar el vértice, el cual tiene por coordenadas (-**d**; **e**).
- Determinar el (0; $\mathbf{d}^2+\mathbf{e}$) y su simétrico (-2**d**; $\mathbf{d}^2+\mathbf{e}$).
- Representar los tres puntos determinados en un sistema de coordenadas rectangulares.

- Traza la curva que pase por los tres puntos representados.

Procedimiento 4: para transferir de la ecuación y=**a**(x+**d**)^2+**e** a la representación gráfica, con lápiz y papel (**a**=1, **d**≠0 y **e**≠0).

- Determinar el vértice, el cual tiene por coordenadas (-**d**; **e**).
- Determinar el (-**d**-1; 1+**e**) y su simétrico (-**d**+1; 1+**e**).
- Representar los tres puntos determinados en un sistema de coordenadas rectangulares.
- Traza la curva que pase por los tres puntos representados.

Procedimiento 5: para transferir de la ecuación y=**a**(x+**d**)^2+**e** a la representación gráfica, con lápiz y papel (**a**≠0, **a**≠1, **d**≠0 y **e**≠0).

- Determinar el vértice, el cual tiene por coordenadas (-**d**; **e**).
- Determinar el (0; **ad**^{2}+**e**) y su simétrico (-2**d**; **ad**^{2}+**e**).
- Representar los tres puntos determinados en un sistema de coordenadas rectangulares.
- Traza la curva que pase por los tres puntos representados.

Procedimiento 6: para transferir de la ecuación y=**a**(x+**d**)^2+**e** a la representación gráfica, con lápiz y papel (**a**≠0, **a**≠1, **d**≠0 y **e**≠0).

- Determinar el vértice, el cual tiene por coordenadas (-**d**; **e**).
- Determinar el (-**d**-1; **a**+**e**) y su simétrico (-**d**+1; **a**+**e**).
- Representar los tres puntos determinados en un sistema de coordenadas rectangulares.
- Traza la curva que pase por los tres puntos representados.

Procedimiento 7: para transferir de la ecuación y=**a**(x+**d**)^2+**e** a la representación gráfica, con lápiz y papel (**a**=1, **d**≠0 y **e**=0).

- Determinar el vértice, el cual tiene por coordenadas (-**d**; 0).
- Determinar el (0; **d**^{2}) y su simétrico (-2**d**; **d**^{2}).
- Representar los tres puntos determinados en un sistema de coordenadas rectangulares.
- Traza la curva que pase por los tres puntos representados.

Procedimiento 8: para transferir de la ecuación y=**a**(x+**d**)^2+**e** a la representación gráfica, con lápiz y papel (**a**=1, **d**≠0 y **e**=0).

- Determinar el vértice, el cual tiene por coordenadas (-**d**; 0).
- Determinar el (-**d**-1; 1) y su simétrico (-**d**+1; 1).
- Representar los tres puntos determinados en un sistema de coordenadas rectangulares.

- Traza la curva que pase por los tres puntos representados.

Procedimiento 9: para transferir de la ecuación y=**a**(x+**d**)^2+**e** a la representación gráfica, con lápiz y papel (**a**≠0, **a**≠1, **d**≠0 y **e**=0).

- Determinar el vértice, el cual tiene por coordenadas (-**d**; 0).
- Determinar el (0; **ad**^{2}) y su simétrico (-2**d**; **ad**^{2}).
- Representar los tres puntos determinados en un sistema de coordenadas rectangulares.
- Traza la curva que pase por los tres puntos representados.

Procedimiento 10: para transferir de la ecuación y=**a**(x+**d**)^2+**e** a la representación gráfica, con lápiz y papel (**a**≠0, **a**≠1, **d**≠0 y **e**=0).

- Determinar el vértice, el cual tiene por coordenadas (-**d**; 0).
- Determinar el (-**d**-1; **a**) y su simétrico (**-d**+1; **a**).
- Representar los tres puntos determinados en un sistema de coordenadas rectangulares.
- Traza la curva que pase por los tres puntos representados.

Procedimiento 11: para transferir de la ecuación y=**a**(x+**d**)^2+**e** a la representación gráfica, con lápiz y papel (**a**=1, **d**=0 y **e**≠0).

- Determinar el vértice, el cual tiene por coordenadas (0; **e**).
- Determinar el (1; 1+**e**) y su simétrico (-1; 1+**e**).
- Representar los tres puntos determinados en un sistema de coordenadas rectangulares.
- Traza la curva que pase por los tres puntos representados.

Procedimiento 12: para transferir de la ecuación y=**a**(x+**d**)^2+**e** a la representación gráfica, con lápiz y papel (**a**≠0, **a**≠1, **d**=0 y **e**≠0).

- Determinar el vértice, el cual tiene por coordenadas (0; **e**).
- Determinar el (1; **a**+**e**) y su simétrico (-1; **a**+**e**).
- Representar los tres puntos determinados en un sistema de coordenadas rectangulares.
- Traza la curva que pase por los tres puntos representados.

Anexo 15.

Procedimientos de transferencia directa (con lápiz y papel) de la representación gráfica a la representación analítica canónica (RG→ RC) de una función cuadrática en función de las condiciones gráficas.		
Caso	Condiciones gráficas	Procedimiento
1	Se conocen las coordenadas del vértice.	1
2	No se conocen las coordenadas del vértice.	2

Procedimientos particulares

Procedimiento 1: para transferir de la representación gráfica a la representación $y=\mathbf{a}(x+\mathbf{d})^2+\mathbf{e}$, con lápiz y papel.

- Determinar los valores de los parámetros **d** y **e**, a partir de las coordenadas del vértice, y las coordenadas de un punto por donde el gráfico pasa.
- Formar una ecuación partiendo de sustituir los valores de los parámetros **d** y **e** y el punto determinado por donde el gráfico de la función pasa.
- Resolver la ecuación y determinar el valor del parámetro **a**.
- Escribir la representación analítica.

Procedimiento 2: para transferir de la representación gráfica a la representación $y=\mathbf{a}(x+\mathbf{d})^2+\mathbf{e}$, con lápiz y papel.

- Determinar las coordenadas de tres de los puntos por donde pasa el gráfico.
- Formar un sistema de ecuaciones lineales a partir de sustituir los tres puntos determinados.
- Resolver el sistema de ecuaciones lineales y determinar los valores de los parámetros **a** y **d** y **e**.
- Escribir la representación analítica.

Anexo 16.

Procedimientos de transferencia directa (con lápiz y papel) de la representación analítica multiplicativa a la representación gráfica (RM→ RG) de una función cuadrática en función de las condiciones de los parámetros.		
Caso	Condiciones para los parámetros **a**, **g** y **r**.	Procedimiento
1	**a**=1, **g**=0 y **r**=0	1
2	**a**≠0, **a**≠1, **g**=0 y **r**=0	2
3	**a**=1, **g**≠0 y **r**=0	3
4	**a**≠0, **a**≠1, **g**≠0 y **r**=0	4
5	**a**=1, **g**=0, **r**≠0	3 (Sustituyendo a **g** por **r**.)
6	**a**≠0, **a**≠1, **g**=0, **r**≠0	4 (Sustituyendo a **g** por **r**.)
7	**a**=1, **g**≠0, **r**≠0 y **g**≠**r**	5
8	**a**=1, **g**≠0, **r**≠0 y **g**=**r**	6 y 7
9	**a**≠0, **a**≠1, **g**≠0, **r**≠0 y **g**≠**r**	8
10	**a**≠0, **a**≠1, **g**≠0, **r**≠0 y **g**=**r**	9 y 10

Procedimientos particulares

Procedimiento 1: para transferir de la ecuación y= **a**(x+**g**) (x+**r**) a la representación gráfica, con lápiz y papel (**a**=1, **g**=0 y **r**=0).

- Determinar el vértice, el cual tiene por coordenadas (0; 0).
- Determinar el punto (-1; 1) y su simétrico (1; 1).
- Representar los tres puntos determinados en un sistema de coordenadas rectangulares.
- Traza la curva que pase por los tres puntos representados.

Procedimiento 2: para transferir de la ecuación y= **a**(x+**g**) (x+**r**) a la representación gráfica, con lápiz y papel (**a**≠0, **a**≠1, **g**=0 y **r**=0).

- Determinar el vértice, el cual tiene por coordenadas (0; 0).
- Determinar el punto (-1; **a**) y su simétrico (1; **a**).
- Representar los tres puntos determinados en un sistema de coordenadas rectangulares.
- Traza la curva que pase por los tres puntos representados.

Procedimiento 3: para transferir de la ecuación y= **a**(x+**g**) (x+**r**) a la representación gráfica, con lápiz y papel (**a**=1, **g**≠0 y **r**=0).

- Determinar el vértice, el cual tiene por coordenadas ($\frac{-g}{2}$; $\frac{-g^2}{4}$).
- Determinar los puntos de intercepción del gráfico con el eje de las abscisas, los cuales tienen por coordenadas (0; -**g**) y (0; 0).
- Representar los tres puntos determinados en un sistema de coordenadas rectangulares.
- Traza la curva que pase por los tres puntos representados.

Procedimiento 4: para transferir de la ecuación y= **a**(x+**g**) (x+**r**) a la representación gráfica, con lápiz y papel (**a**≠0, **a**≠1, **g**≠0 y **r**=0).

- Determinar el vértice, el cual tiene por coordenadas ($\frac{-g}{2}$; $\frac{-ag^2}{4}$).
- Determinar los puntos de intercepción del gráfico con el eje de las abscisas, los cuales tienen por coordenadas (0; -**g**) y (0; 0).
- Representar los tres puntos determinados en un sistema de coordenadas rectangulares.
- Traza la curva que pase por los tres puntos representados.

Procedimiento 5: para transferir de la ecuación y= **a**(x+**g**) (x+**r**) a la representación gráfica, con lápiz y papel (**a**=1, **g**≠0, **r**≠0 y **g**≠**r**).

- Determinar el vértice, el cual tiene por coordenadas ($\frac{-g-r}{2}$; $\frac{-(g-r)^2}{4}$).
- Determinar los puntos de intercepción del gráfico con el eje de las abscisas, los cuales tienen por coordenadas (0; -**g**) y (0; -**r**).
- Representar los tres puntos determinados en un sistema de coordenadas rectangulares.
- Traza la curva que pase por los tres puntos representados.

Procedimiento 6: para transferir de la ecuación y= **a**(x+**g**) (x+**r**) a la representación gráfica, con lápiz y papel (**a**=1, **g**≠0, **r**≠0 y **g**=**r**).

- Determinar el vértice, el cual tiene por coordenadas (-**g**; 0).
- Determinar el (0; $\mathbf{g}^2$) y su simétrico (-2**g**; $\mathbf{g}^2$).
- Representar los tres puntos determinados en un sistema de coordenadas rectangulares.
- Traza la curva que pase por los tres puntos representados.

Procedimiento 7: para transferir de la ecuación y= **a**(x+**g**) (x+**r**) a la representación gráfica, con lápiz y papel (**a**=1, **g**≠0, **r**≠0 y **g**=**r**).

- Determinar el vértice, el cual tiene por coordenadas (-**g**; 0).

- Determinar el (-**g** -1; 1) y su simétrico (**-g**+1; 1).
- Representar los tres puntos determinados en un sistema de coordenadas rectangulares.
- Traza la curva que pase por los tres puntos representados.

Procedimiento 8: para transferir de la ecuación y= **a**(x+**g**) (x+**r**) a la representación gráfica, con lápiz y papel (**a**≠0, **a**≠1, **g**≠0, **r**≠0 y **g**≠**r**).

- Determinar el vértice, el cual tiene por coordenadas ($\frac{-g-r}{2}$; $\frac{-a(g-r)^2}{4}$).
- Determinar los puntos de intercepción del gráfico con el eje de las abscisas, los cuales tienen por coordenadas (0; -**g**) y (0; -**r**).
- Representar los tres puntos determinados en un sistema de coordenadas rectangulares.
- Traza la curva que pase por los tres puntos representados.

Procedimiento 9: para transferir de la ecuación y= **a**(x+**g**) (x+**r**) a la representación gráfica, con lápiz y papel (**a**≠0, **a**≠1, **g**≠0, **r**≠0 y **g**=**r**).

- Determinar el vértice, el cual tiene por coordenadas (-**g**; 0).
- Determinar el (0; $\mathbf{ag}^2$) y su simétrico (-2**d**; $\mathbf{ag}^2$).
- Representar los tres puntos determinados en un sistema de coordenadas rectangulares.
- Traza la curva que pase por los tres puntos representados.

Procedimiento 10: para transferir de la ecuación y= **a**(x+**g**) (x+**r**) a la representación gráfica, con lápiz y papel (**a**≠0, **a**≠1, **g**≠0, **r**≠0 y **g**=**r**).

- Determinar el vértice, el cual tiene por coordenadas (-**g**; 0).
- Determinar el (-**d**-1; **a**) y su simétrico (**-d**+1; **a**).
- Representar los tres puntos determinados en un sistema de coordenadas rectangulares.
- Traza la curva que pase por los tres puntos representados.

Anexo 17.

Procedimientos de transferencia directa (con lápiz y papel) de la representación gráfica a la representación analítica multiplicativa (RG→ RM) de una función cuadrática en función de las condiciones gráficas.		
Caso	Condiciones gráficas	Procedimiento
1	El gráfico corta en dos puntos al eje “x” y se conocen las coordenadas de estos puntos.	1
2	El gráfico corta en dos puntos al eje “x” y no se conocen las coordenadas de estos puntos.	2
3	El gráfico corta en un solo punto al eje “x” y se conocen las coordenadas de este punto.	3
4	El gráfico corta en un solo punto al eje “x” y no se conocen las coordenadas de este punto.	4

Procedimientos particulares

Procedimiento 1: para transferir de la representación gráfica a la representación y=**a**(x+**g**) (x+**r**), con lápiz y papel.

- Determinar los valores de los parámetros **g** y **r**, a partir de las coordenadas de los puntos de intercepción con el eje de las abscisas, y las coordenadas de un punto por donde el gráfico pasa.
- Formar una ecuación partiendo de sustituir los valores de los parámetros **g** y **r** y el punto determinado por donde el gráfico de la función pasa.
- Resolver la ecuación y determinar el valor del parámetro **a**.
- Escribir la representación analítica.

Procedimiento 2: para transferir de la representación gráfica a la representación y=**a**(x+**g**) (x+**r**), con lápiz y papel.

- Determinar las coordenadas de tres de los puntos por donde pasa el gráfico.
- Formar un sistema de ecuaciones lineales a partir de sustituir los tres puntos determinados.
- Resolver el sistema de ecuaciones lineales y determinar los valores de los parámetros **a** y **g** y **r**.
- Escribir la representación analítica.

Procedimiento 3: para transferir de la representación gráfica a la representación y=**a**(x+**g**) (x+**r**), con lápiz y papel.

- Determinar el valor del parámetro **g** (el cual en este caso es igual a **r**), a partir de las coordenadas del punto de intercepción con el eje de las abscisas, y las coordenadas de un punto por donde el gráfico pasa.

- Formar una ecuación partiendo de sustituir el valor del parámetro **g** y el punto determinado por donde el gráfico de la función pasa.
- Resolver la ecuación y determinar el valor del parámetro **a**.
- Escribir la representación analítica.

Procedimiento 4: para transferir de la representación gráfica a la representación y=**a**(x+**g**) (x+**r**), con lápiz y papel.

- Determinar las coordenadas de dos de los puntos por donde pasa el gráfico.
- Formar un sistema de ecuaciones lineales a partir de sustituir los dos puntos determinados.
- Resolver el sistema de ecuaciones lineales y determinar los valores de los parámetros **a** y **g** (en este caso g es igual a **r**).
- Escribir la representación analítica.

Anexo 18.

Procedimientos de transferencia directa (con del ordenador) de la representación analítica estándar a la representación gráfica (RE→RG) de una función cuadrática según diferentes programas informáticos.	
Programa informático a utilizar.	Procedimiento
Asistente Matemático Equation Grapher.	1
Microsoft Office Excel.	2
Simulador de Ecuaciones del Software Educativo Eureka.	3

Procedimientos

Procedimiento 1: para transferir de la representación analítica a representación gráfica, con el uso del ordenador.

- Escribir la representación analítica en la caja de texto que aparece debajo de la barra de menús y la barra de herramienta estándar.
- Presionar la tecla Enter o hacer clic en el icono de la barra de herramientas que tiene como imagen un lápiz.

Procedimiento 2: para transferir de la representación analítica a representación gráfica, con el uso del ordenador.

- Hacer una representación tabular donde se precise al menos tres puntos que pertenezcan al gráfico.
- Seleccionar los rangos correspondientes a los valores de las preimágenes y de las imágenes.
- Hacer clic en el menú Insertar de la barra de menús y luego hacer clic en la opción “Gráfico”, o hacer clic en el icono que tiene como imagen un gráfico de barras y que se encuentra en la barra de herramientas estándar.
- En la ventana “Asistente para gráficos – paso 1 de 4: tipo de gráfico”, seleccionar el tipo de gráfico XY (Dispersión), elegir el subtipo de gráfico que se desee, hacer clic en el botón Siguiente e ir precisando toda la información que se requiera según las solicitudes del asistente.

Procedimiento 3: para transferir de la representación analítica a representación gráfica, con el uso del ordenador.

- Ir al menú Archivo y hacer clic en la opción “Nuevo” o presionar las teclas Ctrl+N.
- Ir al menú Función y hacer clic en la opción “Agregar función” o presionar la tecla F2.
- Verificar que la casilla de selección “Función definida por defecto” esté activada y en la caja de texto que se refiere a esta opción esté señalada la función cuadrática.
- Hacer clic en aceptar y especificar los valores de los parámetros de la representación analítica.

Anexo 19.

Procedimientos de transferencia directa (con del ordenador) de la representación gráfica a la representación analítica estándar (RG→RE) de una función cuadrática según el programa de Microsoft Office Excel.	
Programa informático a utilizar.	Procedimiento
Microsoft Office Excel.	1

Procedimientos

Procedimiento 1: para transferir de la representación gráfica a representación analítica, con el uso del ordenador.

- Seleccionar el gráfico.
- Hacer clic en el menú Gráfico de la barra de menús y luego clic en la opción "Agregar línea de tendencia…".
- En la ventana "Agregar línea de tendencia", específicamente en la ficha Tipo, seleccionar como tipo de tendencia o regresión la polinomial y precisar que el orden es 2.
- En la ficha Opciones de la ventana mencionada en el paso tres, se debe hacer clic en la casilla de verificación "Presentar ecuación en el gráfico" y hacer clic en Aceptar.

Anexo 20.

Con el objetivo de tener en cuenta alguna dificultad que se pueda presentar a la hora de aplicar la alternativa didáctica elaborada, se han precisado las siguientes variables ajenas o colaterales:

- Número de computadoras del laboratorio que tengan instalado el asistente matemático Equation Grapher y que estén disponibles para los estudiantes.
- Habilidades que tengan los estudiantes en la navegación por el asistente matemático Equation Grapher.
- Habilidades que tengan los técnicos del laboratorio de computación en la navegación por el asistente matemático Equation Grapher, que permita proporcionarles ayuda a los estudiantes en caso de que estos la necesiten cuando vayan a realizar las tareas independiente.
- Motivación, tiempo y conocimientos previos necesarios que tengan los estudiantes para realizar las tareas que se les orientan.

Anexo 21.

Criterios valorativos para medir los indicadores de la dimensión cognitiva.

Criterios valorativos para medir la efectividad del dominio del procedimiento para transferir de la representación analítica expresada en la forma canónica a la representación gráfica, utilizando lápiz y papel.

Paso del procedimiento	**Criterio valorativo de cada paso del procedimiento**		
	Bien (B)	**Regular (R)**	**Mal (M)**
1. Identificar las coordenadas del vértice (ICV)	Identifica las coordenadas del vértice sin cometer errores.	Identifica las coordenadas del vértice, pero se equivoca en el signo de alguna de ellas.	No es capaz de identificar las coordenadas del vértice o identifica sólo una.
2. Determinar los puntos (0; **ad**^{2}+**e**) y ($\frac{-b}{a}$; **ad**^{2}+**e**) para el caso en que el parámetro **d** sea diferente de cero. En caso que el parámetro **d** sea igual a cero los dos restantes puntos pueden ser (1; **a**+**e**) y (-1; **a**+**e**), o determinar otros dos puntos cualesquiera (DOP)	Determina los dos puntos que faltan.	Determina los dos puntos que faltan, pero se equivoca en algún cálculo al hacerlo.	No determina los puntos o determina uno solo.
3. Representar los puntos obtenidos en un sistema de coordenadas rectangulares. (RP)	Representa todos los puntos obtenidos sin errores.	Representa dos puntos bien y se equivoca en un tercero.	No representa ningún punto, los representa mal o sólo representa uno bien.
4. Trazar el gráfico de la función (TG)	Traza el gráfico teniendo en	Traza el gráfico restringiendo el dominio de la	No traza el gráfico o une los puntos

	cuenta el dominio de la función.	función sólo hasta los puntos que tienen como abscisa el mayor y el menor valor.	representados mediante segmentos.

Criterios valorativos para medir la efectividad del dominio del procedimiento para transferir de la representación gráfica a la representación analítica expresada en la forma canónica, utilizando lápiz y papel.			
Paso del procedimiento	**Criterio valorativo de cada paso del procedimiento**		
	Bien (B)	**Regular (R)**	**Mal (M)**
1. Determinar los valores de los parámetros **d** y **e**, a partir de las coordenadas del vértice, y las coordenadas de un punto por donde el gráfico pasa (DVP)	Determina los valores de los parámetros **d** y **e**, y las coordenadas del punto por donde el gráfico pasa sin errores.	Determina los valores de los parámetros **d** y **e**, y las coordenadas del punto por donde el gráfico pasa, pero se equivoca en el signo de alguno de ellos.	No determina los valores de los parámetros ni las coordenadas del punto por donde el gráfico pasa o determina sólo algunos de estos valores.
2. Formar una ecuación partiendo de sustituir los valores de los parámetros **d** y **e** y el punto determinado por donde el gráfico de la función pasa (FE)	Forma la ecuación sin errores.	Forma la ecuación y se equivoca cuando sustituye uno o dos valores.	No forma la ecuación o se equivoca cuando sustituye todos los valores o tres de ellos.
3. Resolver la ecuación y determinar el valor del parámetro **a** (RE)	Resuelve la ecuación y determinar el valor del parámetro a sin errores.	Resuelve la ecuación, pero se equivoca en algún cálculo.	No resuelve la ecuación.
4. Escribir la representación	Escribe la representació	Escribe la representación,	No escribe la representación

analítica en la forma canónica (ERC)	n analítica en la forma canónica sin errores.	pero se equivoca al ubicar dos de los tres parámetros.	o se equivoca en la ubicación de todos los parámetros.

Criterios valorativos para medir la efectividad del dominio del procedimiento para transferir de la representación expresada un la en la forma estándar a la representación gráfica, utilizando lápiz y papel.			
Paso del procedimiento	**Criterio valorativo de cada paso del procedimiento**		
	Bien (B)	**Regular (R)**	**Mal (M)**
1. Determinar las coordenadas del vértice (DCV)	Determina las coordenadas del vértice.	Determina las coordenadas, pero se equivoca en algún cálculo.	No determina las coordenadas.
2. Determinar los puntos (0; **c**) y ($\frac{-b}{a}$; **c**) para el caso en que el término $\frac{-b}{2a}$ sea diferente de cero. En caso de que el término $\frac{-b}{2a}$ sea igual a cero, los dos restantes puntos pueden ser (1; **a**+**b**+**c**) y (-1; **a**+**b**+**c**), o determinar otros dos puntos cualesquiera (DOPS)	Determina los dos puntos que faltan.	Determina los dos puntos que faltan, pero se equivoca en algún cálculo al hacerlo.	No determina los puntos o determina uno solo.
3. Representar los puntos obtenidos en un sistema de coordenadas rectangulares (RP)	Representa todos los puntos obtenidos.	Representa dos puntos bien y se equivoca en el tercero.	No representa ningún punto, los representa mal o sólo representa uno bien.

4. Trazar el gráfico de la función (TG)	Traza el gráfico teniendo en cuenta el dominio de la función.	Traza el gráfico restringiendo el dominio de la función sólo hasta los puntos que tienen como abscisa el mayor y el menor valor.	No traza el gráfico o une los puntos representados mediante segmentos.

Criterios valorativos para medir la efectividad del dominio del procedimiento para transferir de la representación gráfica a la representación analítica expresada en la forma estándar, utilizando lápiz y papel.			
Paso del procedimiento	**Criterio valorativo de cada paso del procedimiento**		
	Bien (B)	**Regular (R)**	**Mal (M)**
1. Determinar el valor del parámetro **c** a partir del punto de intersección del gráfico con el eje de las ordenadas, y las coordenadas de dos puntos por donde el gráfico pasa (DVPC)	Determina el valor del parámetro **c** a partir del punto de intersección del gráfico respecto al eje de las ordenadas, y las coordenadas de dos puntos por donde el gráfico pasa.	Confunde el valor del parámetro **c** con uno de los ceros de la función y determina bien las coordenadas de los dos puntos por donde el gráfico de la función pasa, o se equivoca en el signo de alguno de estos valores.	No determina el valor del parámetro **c** ni los dos puntos por donde el gráfico pasa o sólo determina algunos de estos valores.
2. Formar un sistema de ecuaciones lineales a partir de sustituir el valor del parámetro **c** y los dos puntos determinados por donde el gráfico de la función pasa (FSEL)	Forma el sistema de ecuaciones sin errores.	Forma el sistema de ecuaciones y se equivoca a la hora de sustituir uno o dos valores.	No forma el sistema o se equivoca a la hora de sustituir todos los valores.
3. Resolver el sistema de ecuaciones lineales	Resuelve el sistema y	Resuelve el sistema, pero se	No resuelve el sistema.

y determinar los valores de los parámetros **a** y **b** (RSEL)	determina el valor del parámetro a sin errores.	equivoca en algún cálculo.	
4. Escribir la representación analítica en la forma estándar (ERE)	Escribe la representació n analítica en la forma estándar sin errores.	Escribe la representación, pero se equivoca al ubicar dos de los tres parámetros.	No escribe la representación o se equivoca en la ubicación de todos los parámetros.

Criterios valorativos para medir la efectividad del dominio del procedimiento para transferir de la representación analítica expresada en la forma estándar a la expresada en la forma canónica, utilizando lápiz y papel.			
Paso del procedimiento	**Criterio valorativo de cada paso del procedimiento**		
	Bien (B)	**Regular (R)**	**Mal (M)**
1. Calcular los valores de los parámetros **d** y **e** (CVP)	Calcula los valores de los parámetros **d** y **e** sin errores.	Calcula los valores, pero se equivoca en algún cálculo.	No calcula al menos un valor.
2. Escribir la representación de la función en forma canónica (ERC)	Escribe la representació n en la forma canónica sin errores.	Escribe la representación, pero se equivoca al ubicar dos de los tres parámetros.	No escribe la representación o se equivoca en la ubicación de todos los parámetros.

Criterios valorativos para medir la efectividad del dominio del procedimiento para transferir de la representación analítica expresada en la forma canónica a la expresada en la forma estándar, utilizando lápiz y papel.			
Paso del procedimiento	**Criterio valorativo de cada paso del procedimiento**		
	Bien (B)	**Regular (R)**	**Mal (M)**

1. Calcular los valores de los parámetros **b** y **c** (CVPBC)	Calcula los valores de los parámetros **b** y **c**.	Calcula los valores, pero se equivoca en algún cálculo.	No calcula los valores.
2. Escribir la representación de la función en forma estándar (ERE)	Escribe la representación en la forma estándar sin errores.	Escribe la representación, pero se equivoca al ubicar dos de los tres parámetros.	No escribe la representación o se equivoca en la ubicación de todos los parámetros.

Anexo 21.1.

Modelo estadístico para la determinación del índice de efectividad del dominio de un procedimiento de transferencia.

1. Variables

1.1. Subíndices

i: procedimiento.

j: paso del procedimiento.

k: número de la medición.

1.2. Valores de subíndices

N: número de procedimientos de transferencia (i: $\overline{1, N}$).

N_i: número de pasos del procedimiento de transferencia i (j: $\overline{1, N_i}$).

M_i: número de mediciones de la efectividad del procedimiento i.

1.3. Variables estadísticas

e_{ij}: variable relativa al valor de escala original que se le asigna a la efectividad del dominio del paso j del procedimiento i según los criterios del anexo 21.

E_{ij}: variable relativa al valor de escala que se le asigna a la efectividad del dominio del paso j del procedimiento i según la regla siguiente:

$$E_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ si } p_{ij}=M \\ 50, 0, \text{ si } p_{ij}=R \\ 100, 0, \text{ si } p_{ij}=B \end{cases}$$

1.4. Coeficientes de ponderación

C_{ij}: coeficiente de ponderación del paso j del procedimiento i.

1.5. Índice

E_i: índice que expresa la efectividad del dominio del procedimiento i.

2. Fórmula para calcular el índice

$$E_i = \frac{\sum_{j=1}^{N_i} C_{ij} E_{ij}}{\sum_{j=1}^{N_i} E_{ij}} : M_i$$

Anexo 22.

Criterios valorativos para medir los indicadores de la dimensión actuativa.

Criterios valorativos para medir los indicadores de la dimensión actuativa.			
Indicador	**Criterio valorativo de cada paso del procedimiento**		
	Bien (B)	**Regular (R)**	**Mal (M)**
Efectividad del dominio del procedimiento.	El índice de efectividad para tareas análogas a las resueltas pertenece al intervalo [67; 100].	El índice de efectividad para tareas análogas a las resueltas pertenece al intervalo [33; 67).	El índice de efectividad para tareas análogas a las resueltas pertenece al intervalo [0; 33).
Eficacia del dominio del procedimiento.	El índice de efectividad para tareas diferentes a las resueltas pertenece al intervalo [67; 100].	El índice de efectividad para tareas diferentes a las resueltas pertenece al intervalo [33; 67).	El índice de efectividad para tareas diferentes a las resueltas pertenece al intervalo [0; 33).
Eficiencia del dominio del procedimiento.	Logra explotar al máximo los recursos y medios disponibles, según las condiciones y exigencias de la tarea de aprendizaje, para obtener el resultado correcto en el menor tiempo posible.	Explota parcialmente los recursos y medios disponibles, según las condiciones y exigencias de la tarea de aprendizaje, para obtener el resultado correcto en el menor tiempo posible.	No explota o explota muy poco los recursos y medios disponibles, según las condiciones y exigencias de la tarea de aprendizaje, para obtener el resultado correcto en el menor tiempo posible.

Anexo 23.

Guía de observación.

Objetivo: Comprobar la efectividad, eficiencia y eficacia, por parte de los alumnos y alumnas, en el dominio de los procedimientos para transferir entre representaciones analíticas y gráfica de funciones cuadráticas.

1. ¿Logra, a partir de la ejecución del procedimiento, un resultado coincidente con la representación de la función cuadrática esperada?

   Siempre___, A veces___, Nunca___.

2. ¿Utilizando el procedimiento, es capaz de transferir entre distintas representaciones expresadas en el mismo sistema de representación o en sistemas diferentes cuando varía la tarea y la situación de enseñanza-aprendizaje?

   Siempre___, A veces___, Nunca___.

3. ¿Es capaz de aprovechar al máximo los medios y los recursos con que dispone para ejecutar el procedimiento, en dependencia de las condiciones y exigencias de la tarea, para obtener el resultado correcto en el menor tiempo posible?

   Siempre___, A veces___, Nunca___.

Anexo 24.

Guía de observación.

Objetivo: Comprobar la comunicación en el desempeño, de los alumnos y alumnas, al transferir entre representaciones analíticas y gráfica de funciones cuadráticas para valorar su comunicación.

1. ¿Utiliza correctamente el lenguaje técnico de la asignatura?

   Siempre___, A veces___, Nunca___.

2. ¿Es crítico antes sus propios dificultades a la hora de transferir entre representaciones?

   Siempre___, A veces___, Nunca___.

3. ¿Es crítico ante las dificultades de los demás cuando transfieren entre representaciones?

   Siempre___, A veces___, Nunca___.

Anexo 25.

Criterios valorativos para medir los indicadores de la dimensión comunicacional.

Criterios valorativos para medir los indicadores de la dimensión comunicacional.			
Indicador	**Bien (B)**	**Regular (R)**	**Mal (M)**
1	Siempre utiliza correctamente el lenguaje técnico de la asignatura.	A veces utiliza correctamente el lenguaje técnico de la asignatura.	No utiliza correctamente el lenguaje técnico de la asignatura
2	Siempre critica sus dificultades.	A veces critica sus dificultades.	Nunca critica sus dificultades.
3	Siempre critica las dificultades de los demás.	A veces critica las dificultades de los demás.	No critica las dificultades de los demás.